

Глава 4

Волны в средах с пузырьками**§ 1. ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ПУЗЫРЬКИ. РЕЗОНАНСНАЯ ЧАСТОТА.**

Рассмотрим линейные колебания газовых пузырьков в жидкости. Будем интересоваться только колебаниями радиуса, то есть пульсациями. Это связано с тем, что при осцилляциях, то есть при смещениях центра пузырька относительно жидкости, он излучает как диполь, а при пульсациях – как монополь. Излучение монополя гораздо эффективнее. Кроме того, осцилляции пузырька не дают вклада в сжимаемость среды.

Будем считать, что упругий безмассовый пузырёк газа окружён массивной жидкостью. Тогда, по аналогии с грузиком на пружинке, резонансная частота пузырька будет:

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Здесь $m = 4\pi\rho_0 R_0^3$ – присоединённая масса жидкости (М.А.Исакович).

Коэффициент упругости пузырька газа можно определить из закона Гука: $F = -kx$. Сожмём пузырёк чуть-чуть. Изменение радиуса обозначим x , причём $x \ll R_0$. Первоначальный объём V_0 уменьшится на ΔV и станет V . Будем считать, что газ в пузырьке сжимается адиабатически внешним давлением $(\Delta p + p_0)$.

$$\frac{\Delta p + p_0}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx 1 - \gamma \frac{\Delta V}{V_0} ;$$

$$1 + \frac{\Delta p}{p_0} = 1 - \gamma \frac{\Delta V}{V_0} \quad \text{или} \quad \Delta p = -\gamma p_0 \frac{\Delta V}{V_0} , \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 , \quad \Delta V \approx 4\pi R_0^2 x .$$

На пузырёк действует сила $F = \Delta p \cdot 4\pi R_0^2$. Подставим сюда выражение для Δp :

$$F = -\left(p_0 \gamma \frac{\Delta V}{V_0}\right) 4\pi R_0^2 = \frac{-p_0 \gamma 4\pi R_0^2 x \cdot 3 \cdot 4\pi R_0^2}{4\pi R_0^3} = -(12\pi \gamma p_0 R_0) x .$$

Тогда $k = 12\pi \gamma p_0 R_0$ и резонансная частота будет:
$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_0}} . \quad (1)$$

Заметим, что здесь мы не учли поверхностное натяжение. Если учитывать поверхностное натяжение, то резонансная частота будет:

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0 + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{R_0}}{\rho_0}} .$$

Вычислим резонансную частоту пузырька воздуха в воде: $\gamma = 1.4$, $p_0 = 10^5$ Па, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³. $f_{\text{рез}}[\text{кГц}] = 3.3/R_0[\text{мм}]$. При $R_0 = 1$ мм, $f_{\text{рез}} = 3.3$ кГц, при этом $\lambda = c_0/f_{\text{рез}} \approx 0.5$ м, то есть длина звуковой волны на частоте резонанса пузырька в пятьсот раз больше его радиуса. Поэтому-то при пульсациях пузырька на частотах, не слишком превышающих резонансную, плотность жидкости вблизи него будет неизменной, а жидкость можно будет считать несжимаемой. Это сильно упрощает вывод уравнения, описывающего пульсации.

§ 2. УРАВНЕНИЕ РЭЛЕЯ.

Следуя лорду Рэлею (Rayleigh) будем рассматривать только сферически-симметричные пульсации газового пузырька в несжимаемой жидкости. Тогда в сферических координатах все угловые производные будут равны нулю. Будем считать, что жидкость несжимаема. В книге В.А.Акуличева показано, что сжимаемость жидкости нужно учитывать только на частотах много выше резонансной или при сильных сжатиях пузырька, когда сжимаемость газа сравнивается со сжимаемостью жидкости.

Сначала напишем в сферических координатах уравнение движения жидкости в отсутствие диссипации и внешних сил – уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} .$$

Уравнение неразрывности в сферических координатах будет:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 . \text{ Для несжимаемой жидкости } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \quad \rho = \rho_0 .$$

Из-за сферической симметрии \vec{v} будет иметь лишь одну компоненту v_r , которую будем обозначать просто v . Производные по угловым координатам равны нулю и в дивергенции останется тоже только производная по радиусу:

$$\text{div}(\rho_0 \vec{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (\rho_0 v)) = 0 , \quad r^2 v = \text{const} . \quad (2)$$

Смысл этой формулы ясен – в несжимаемой жидкости массовая скорость с удалением от центра убывает пропорционально $1/r^2$.

Обозначим радиус пузырька $R = R(t)$. Тогда скорость движения поверхности

$$\text{пузырька } v_1 = \frac{dR}{dt} = \dot{R} . \quad \begin{array}{l} R^2 \frac{dR}{dt} \\ \text{у поверхности пузырька} \end{array} = \begin{array}{l} r^2 \frac{dr}{dt} \\ \text{вне пузырька} \end{array} .$$

$$\text{Отсюда } \dot{r} = \frac{R^2}{r^2} \dot{R} .$$

Эта формула связывает массовую скорость в жидкости вне пузырька \dot{r} со скоростью его поверхности \dot{R} . Наша главная задача – получить уравнение движения стенки пузырька газа и решить его, то есть найти $R = R(t)$. Для исключения r проинтегрируем уравнение Эйлера по этой переменной. Этим действием мы учитываем влияние всей бесконечной толщи жидкости на движение стенки пузырька.

$\int_R^\infty \frac{\partial v}{\partial t} dr + \int_R^\infty v \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{1}{\rho_0} \int_R^\infty \frac{\partial p}{\partial r} dr = 0$. Напоминаем, что r – это радиус произвольной сферы в жидкости.

$$\begin{aligned} \text{Int}_1 &= \int_R^\infty \frac{\partial v}{\partial t} dr = \int_R^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{R^2}{r^2} \dot{R} dr = \int_R^\infty \left[\frac{2R\dot{R}^2}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} \ddot{R} \right] dr = \left[2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R} \right] \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \\ &= \left[2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R} \right] \frac{1}{R} = 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} . \end{aligned}$$

$$\text{Int}_2 = \int_R^\infty v \frac{\partial v}{\partial r} dr = \int_R^0 v dv = \frac{v^2}{2} \Big|_R^0 = -\frac{\dot{R}^2}{2} . \text{ Это потому, что при } R \rightarrow \infty, v \rightarrow 0 .$$

$$\text{Int}_3 = \frac{1}{\rho_0} \int_R^\infty \frac{\partial p}{\partial r} dr = \frac{1}{\rho_0} \int_{p_R}^{p_\infty} dp = \frac{1}{\rho_0} [p_\infty - p_R] . \quad \text{Здесь } p_\infty - \text{ это давление в жидкости}$$

далеко от пузырька, а p_R – давление в жидкости на поверхности пузырька.

$\text{Int}_1 + \text{Int}_2 + \text{Int}_3 = 0$. В итоге получим уравнение лорда Рэлея, которое описывает движение границы газового пузырька в жидкости:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho_0}[p_\infty - p_R] = 0 . \quad (3)$$

Давление внутри пузырька складывается из давления газа p_{gas} и давления пара p_{vap} . Снаружи на газ и пар действует давление в жидкости вблизи поверхности пузырька p_R и давление, создаваемое поверхностным натяжением $2\sigma/R_0$. Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения. По третьему закону Ньютона давление внутри равно давлению снаружи.

$$p_R + \frac{2\sigma}{R} = p_{\text{gas}} + p_{\text{vap}} . \quad (4)$$

Отсюда можно выразить p_R для того, чтобы подставить в уравнение Рэлея. Осталось лишь выразить давление газа в пузырьке через радиус.

Будем считать, что газ не обменивается теплом с жидкостью и его состояние описывается адиабатой Пуассона (Poisson) $pV^\gamma = \text{const}$, а первоначальное давление газа в пузырьке было $p_0 - p_{\text{vap}} + 2\sigma/R_0$, где p_0 – атмосферное давление. Тогда:

$$p_{\text{gas}} V_{\text{gas}}^\gamma = \left(p_0 - p_{\text{vap}} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) V_0^\gamma . \quad \text{Отсюда:}$$

$$p_{\text{gas}} = \left(p_0 - p_{\text{vap}} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{V_0}{V_{\text{gas}}} \right)^\gamma = \left(p_0 - p_{\text{vap}} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} . \quad \text{Подставим в (4):}$$

$$p_R(R) = \left(p_0 - p_{\text{vap}} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} + p_{\text{vap}} - \frac{2\sigma}{R} .$$

Если пузырёк находится в поле гармонической акустической волны с длиной $\lambda \gg R_0$, то $p_\infty = p_0 + p_m \sin \omega t$. Тогда уравнение Рэлея можно записать в таком виде:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho_0} \left(p_0 - p_{\text{vap}} + \frac{2\sigma}{R} + p_m \sin \omega t - \left(p_0 - p_{\text{vap}} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} \right) = 0 . \quad (5)$$

Эту разновидность уравнения Рэлея обычно называют уравнением Нолтинга-Неппайреса (Noltingk, Neppiras).

Давление пара воды при комнатной температуре $p_{\text{vap}} \approx 0.03$ бар = 3000 Па. Давление, вызванное поверхностным натяжением, зависит от радиуса пузырька. Например, для пузырька, едва различимого невооружённым глазом, $R_0 = 0.01$ мм, $\sigma = 0.073$ (кг/сек²), а $2\sigma/R_0 = 0.15$ бар. При дальнейшем уменьшении радиуса поверхностное натяжение сильно увеличивает давление внутри пузырька, усиливается диффузия газа в жидкость, радиус пузырька становится ещё меньше вплоть до полного исчезновения пузырька. Эти оценки показывают, что во многих случаях давлением пара и поверхностным натяжением можно пренебречь. Тогда (5) упрощается:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{\rho_0} \left(p_m \sin \omega t + p_0 \left(1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} \right) \right) = 0 . \quad (6)$$

Мы пренебрегли сжимаемостью жидкости. Значит, наш пузырёк не излучает акустические волны. Вязкими потерями мы тоже пренебрегли. Нет никаких потерь!

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ.

Упростим (6), считая изменения радиуса $x = R - R_0$ небольшими, то есть $x/R_0 \ll 1$.

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3\gamma} = \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3\gamma} = 1 - 3\gamma \frac{x}{R_0} + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} \left(\frac{x}{R_0}\right)^2 + \dots; \quad \dot{R} = \dot{x}; \quad \ddot{R} = \ddot{x}.$$

В итоге получается:

$$R_0 \ddot{x} + \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_0} x = -\frac{p_m}{\rho_0} \sin \omega t - \left[x \ddot{x} + \frac{3}{2} \dot{x}^2 - \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2} \left(\frac{x}{R_0}\right)^2 \frac{p_0}{\rho_0} \right].$$

Разделим на R_0 и вспомним, что $3\gamma p_0 / (\rho_0 R_0^2) = \omega_0^2$, где ω_0 – круговая резонансная частота. Окончательное уравнение будет таким:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{p_m}{\rho_0 R_0} \sin \omega t - \left[\ddot{x} \frac{x}{R_0} + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R_0}\right) \dot{x} - \frac{(3\gamma+1)}{2} \frac{\omega_0^2}{R_0} x^2 \right]. \quad (7)$$

В скобках – три нелинейных члена. Первый член содержит $x \ddot{x}$, второй $-\dot{x}^2$, третий $-x^2$.

Для того, чтобы оценить порядок величины членов уравнения положим $x = x_m \sin \omega t$. Тогда член №2/№1 ~ 1 ,

№4/№1 $\sim x_m/R_0$, №5/№1 $\sim x_m/R_0$, №3/№1 $\sim \rho_0 R_0$, №6/№1 $\sim x_m/R_0$.

Рассмотрим линейные колебания газового пузырька. При $x/R_0 \rightarrow 0$ можно пренебречь малыми нелинейными членами и от уравнения (7) останется:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{p_m}{\rho_0 R_0} \sin \omega t. \quad (8)$$

Это – обычное уравнение линейных колебаний в бездиссипативной системе под действием гармонической вынуждающей силы. Такое уравнение получается, например, для LC контура без потерь. Потерь у нас не оказалось потому, что жидкость мы полагаем несжимаемой и безвязкостной. На самом деле вязкие потери войдут в уравнение через граничные условия, учёт сжимаемости приведёт к потерям на переизлучение звука. Кроме того, процесс сжатия пузырька не чисто адиабатический. Газ обменивается теплом с жидкостью. Это вызывает потери механической энергии.

Для анализа влияния поглощения введём в уравнение (8) диссипативный член, пропорциональный первой производной. Такой член есть в уравнении для колебательного контура с сопротивлением. Если обозначить $-p_m/\rho_0 R_0 = a$, то уравнение станет таким:

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = a \sin \omega t. \quad (9)$$

Способ определения коэффициента g будет указан ниже. Линейность уравнения позволяет записать $\exp(i\omega t)$ вместо $\sin(\omega t)$. Тогда стационарное решение можно искать в виде сдвинутой по фазе синусоиды: $x = A \exp(i(\omega t + \varphi))$. Решение однородного уравнения – затухающие собственные колебания – мы рассматривать не будем.

$$\dot{x} = i\omega x, \quad \ddot{x} = -\omega^2 x. \quad \text{Тогда:}$$

$$A e^{i\omega t} e^{i\varphi} (-\omega^2 + i\omega g + \omega_0^2) = a e^{i\omega t} \quad \text{или} \quad A e^{i\varphi} (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega g) = a.$$

Переведём комплексное число в скобках в показательную форму:

$$c + id = \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\theta}; \quad \theta = \arctg \frac{d}{c}; \quad A e^{i\varphi} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega g)^2} e^{i \arctg \frac{\omega g}{\omega_0^2 - \omega^2}} = a.$$

Число a – вещественное, поэтому:

$$a = A \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega g)^2} ; \quad e^{i\varphi} = e^{-i \arctg \frac{\omega g}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega g)^2}} , \quad \varphi = - \arctg \frac{\omega g}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Введём безразмерную частоту $\Omega = \omega/\omega_0$ и декремент затухания $\delta = g/\omega_0$. Вспомним также, что добротность $Q = 1/\delta$. Тогда:

$$x = -\frac{p_m}{\rho_0 R_0 \omega_0^2} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (\delta \Omega)^2}} , \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\delta \Omega}{1 - \Omega^2} . \quad (10)$$

Следствия очевидны:

1. Если $\Omega \rightarrow 0$, то есть частота вынуждающей силы много меньше резонансной частоты пузырька, то $A = -\frac{p_m}{\rho_0 R_0 \omega_0^2} = -\frac{p_m R_0}{3\gamma \rho_0}$. Здесь использована формула для резонансной частоты (1).

Знак минус показывает, что увеличение внешнего давления приводит к уменьшению радиуса.

2. Если $\Omega \rightarrow \infty$, то частота вынуждающей силы много выше резонансной. $A \rightarrow 0$. Пузырёк не успевает реагировать на высокочастотное воздействие.

3. Если $\Omega \rightarrow 1$, то это резонанс. $A = -\frac{p_m R_0}{3\gamma \rho_0} \cdot Q$. Амплитуда увеличилась в Q раз по сравнению с колебаниями на низких частотах. Кстати, добротность Q численно равна числу периодов, на которых амплитуда свободных колебаний уменьшается в e^π раз (см. примечание). Используя этот факт, можно экспериментально определить добротность пузырьков и по значению добротности вычислить коэффициент g в (9).

Примечание:

Если $\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, то решение в виде свободных колебаний будет:

$x(t) = e^{i\omega t}$. Тогда $-\omega^2 + i\omega g + \omega_0^2 = 0$. Новая комплексная частота будет:

$$\omega_{1,2} = \frac{ig}{2} \pm \sqrt{-\frac{g^2}{4} + \omega_0^2} = \frac{ig}{2} \pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{g^2}{4\omega_0^2}} . \quad x(t) = e^{-\frac{gt}{2}} e^{i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{g^2}{4\omega_0^2}}} .$$

$\delta = \frac{g}{\omega_0}$; $g = \delta \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$. $e^{-\frac{gt}{2}} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$. Отсюда отношение амплитуд при $t_1 = 0$ и при $t_2 = Q \cdot T$ будет:

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\frac{\omega_0 Q T}{2Q}} = e^{\frac{\omega_0}{2f_0}} = e^{\frac{2\pi f_0}{2f_0}} = e^\pi .$$

Разобравшись с линейным уравнением, полученным из уравнения Рэлея, займёмся упрощённым уравнением (7), в котором всё же сохранены три нелинейных члена. Будем искать решение в виде $x = x_1 + x_2$, $x_2 \ll x_1$, x_1 – решение линейного уравнения (9). Оно известно – это (10). Что такое x_2 ? Это – малая добавка к линейным гармоническим колебаниям, обусловленная наличием малых по величине нелинейных членов в (7). Уравнение для x_2 будет иметь вид, аналогичный (9), но выражением, описывающим вынуждающую силу будут нелинейные операции с линейным решением.

$$\ddot{x}_2 + g\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = b \frac{x_1^2}{R_0} - \frac{x_1 \ddot{x}_1}{R_0} - \frac{3}{2} \frac{\dot{x}_1^2}{R_0}. \quad (11)$$

Группа членов, идентичная левой части этого уравнения, но содержащая x_1 , исчезла из-за того, что x_1 – это решение (9). Члены вида:

$$\frac{x_2^2}{R_0}, \frac{x_2 \ddot{x}_2}{R_0}, \frac{\dot{x}_2^2}{R_0}, \frac{x_1 x_2}{R_0}, \frac{x_1 \dot{x}_2}{R_0}, \frac{x_2 \ddot{x}_1}{R_0}, \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{R_0}$$

мы выбросили из-за того, что $x_2/x_1 \ll 1$ и $x_1/R_0 \ll 1$ и они много меньше тех, что оставлены в правой части (11). Из (10) определим вид членов в правой части (11):

$$x_1^2 = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi);$$

$$\dot{x}_1^2 \sim \cos^2(\omega t + \varphi) \sim 1 + \cos 2(\omega t + \varphi);$$

$$x_1 \ddot{x}_1 \sim x_1^2 \sim \sin^2(\omega t + \varphi) \sim 1 - \cos 2(\omega t + \varphi).$$

Кроме того, все нелинейные члены пропорциональны A^2 . Тогда (11) сведётся к уравнению:

$$\ddot{x}_2 + g\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = C + D \cos 2(\omega t + \varphi), \quad \text{где } D \sim A^2.$$

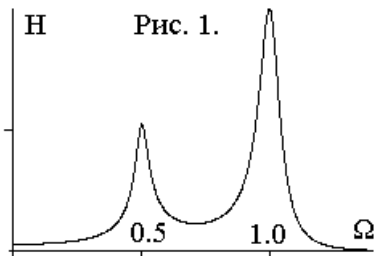
Решение (12) можно искать в виде: $x_2 = E + H \sin [2(\omega t + \varphi) + \xi]$,

$$H = \frac{G}{\sqrt{(1 - 4\Omega^2)^2 + 4(\delta\Omega)^2}}. \quad \text{Здесь } C, D, E, G \text{ и } H \text{ – коэффициенты. Нелинейные}$$

члены в уравнении (7) явились причиной появления нелинейного искажения гармонического колебания – добавки x_2 . Это – колебания с частотой, вдвое большей частоты вынуждающей силы, то есть вторая гармоника. Коэффициент D , а значит и G пропорциональны A^2 , то есть содержат множитель $((1 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2)^{-1}$. Тогда:

$$H \sim \frac{1}{((1 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2) \sqrt{(1 - 4\Omega^2)^2 + 4(\delta\Omega)^2}}.$$

Это – зависимость амплитуды пульсаций пузырька на частоте, вдвое большей частоты вынуждающей силы. График этой зависимости для добротности $Q = 10$ приведён на рис 1. Вторая гармоника имеет максимумы при совпадении частоты вынуждающей силы с резонансной частотой пузырька и при частоте вынуждающей силы вдвое меньше резонансной. И наличие второй гармоники, и двугорбая резонансная кривая – это существенно нелинейные эффекты, отсутствующие при линейных колебаниях.



Итак, мы получили два решения уравнения Рэлея. Одно – для бесконечно малых линейных пульсаций пузырька, второе – для малых, но конечной амплитуды. Учёт нелинейных членов в первом приближении дал вторую гармонику. Последующие приближения дадут более высокие гармоники. Но с точки зрения описания природы такой путь не интересен.

Действительно, требование малости амплитуды колебаний делает трудной задачу наблюдения даже второй гармоники, не говоря о более высокочастотных. Кроме того, интуитивно ясно, что при больших амплитудах могут появиться и другие нелинейные эффекты.

§ 4. ПУЛЬСАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ.

Появление доступных и производительных компьютеров преобразило жизнь физиков, изучающих нелинейные явления. Если раньше нелинейные дифференциальные уравнения приходилось упрощать или изобретать хитроумные упрощённые модели для их решения, то теперь можно попробовать решить любые нелинейные уравнения без оглядки на их сложность.

Мы последовательно решали уравнение Рэля, постепенно усложняя его вплоть до уравнения Херринга-Флинна. Для численного решения использовался метод Рунге – Кутта с автоматическим выбором шага. Сущность метода состоит в том, что на каждом i – том шаге построения решения, по известным из предыдущего шага значениям t_i , R_i , и $\partial R_i/\partial t$, из уравнения, записанного в виде:

$\ddot{R} = \ddot{R}(t, R, \dot{R})$ считают несколько значений второй производной от аргументов, немного больших, чем t_i , R_i , и $\partial R_i/\partial t$, то есть определяют – куда повернёт кривая, описываемая этим дифференциальным уравнением. Затем, по формулам Рунге – Кутта, определяют значения R_{i+1} и $\partial R_{i+1}/\partial t$ для значения $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. В формулах метода Рунге – Кутта, приведённых в известном справочнике Камке, содержится опечатка.

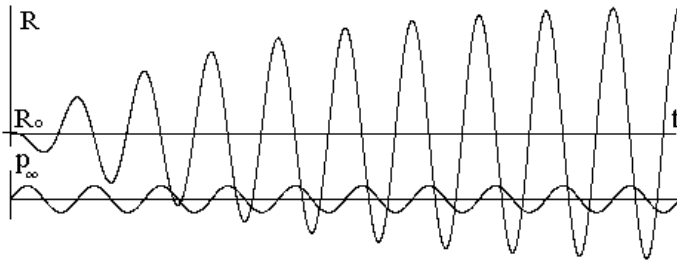


Рис.2.

Если решать линейризованное уравнение (9) с декрементом затухания $\delta = 1/Q = 0.1$, а амплитуду вынуждающей силы p_m

взять 1000 Па, то есть много меньше атмосферного давления, то можно ожидать, что колебания будут линейными. Решение показано на рис. 2. Колебания быстро становятся стационарными. Это связано с тем, что с ростом амплитуды пульсаций растёт и величина первой производной. Диссипативный член пропорционален первой производной, поглощение растёт, а мощность вынуждающей силы ограничена. Разность фаз между колебаниями радиуса и вынуждающей силой равна четверти периода. Видно, что эта разность фаз энергетически выгоднее всего. Вынуждающая сила всё время совершает над пузырьком положительную работу, потому, что при уменьшении радиуса

внешнее давление положительно, а при увеличении – отрицательно.

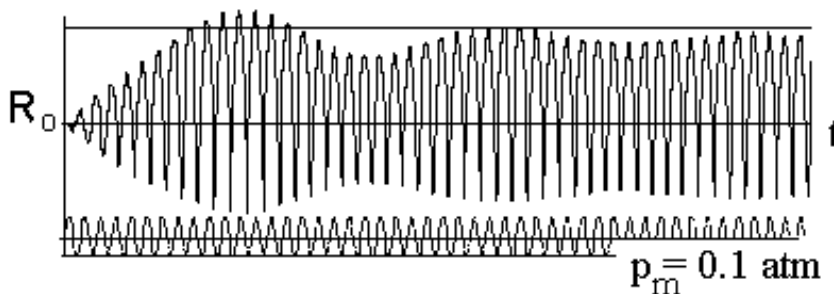


Рис.3.

На рис. 3 показаны пульсации пузырька под действием волны с небольшой амплитудой $p_m = 0.1$ атм. Пульсации не синусоидальные. После трёх десятков периодов вынуждающей силы они становятся стационарными. Форма колебаний мало меняется с увеличением амплитуды. Это периодические пульсации, при которых пузырёк проводит значительно больше времени в расширенном состоянии, чем в сжатом. Чем больше давление, тем больше разница. Типичная форма таких колебаний показана на рис.4.

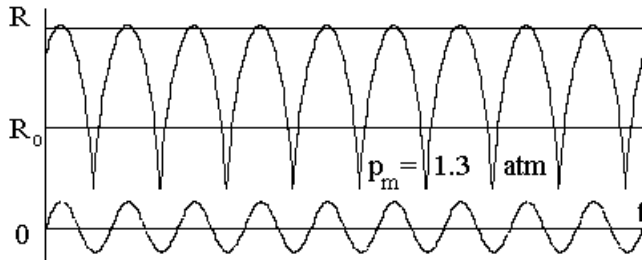


Рис.4.

и на большинстве других графиков частота вынуждающей силы равна линейно-акустической резонансной частоте пузырька.

Когда радиус пузырька больше первоначального, давление в нём меньше. Сквозь границу раздела растворённый в жидкости газ диффундирует внутрь пузырька. Когда радиус меньше – наоборот. Из-за такой формы колебаний диффузия внутрь пузырька преобладает, пузырёк "насыщается" газом и расширяется. Это явление называется выпрямленной диффузией. Испарение жидкости внутрь пузырька приводит к аналогичному явлению – росту пульсирующего пузырька в кипящей жидкости. Оба эти эффекта в нашей модели не рассматриваются. Давление пара постоянно, а диффузия просто не учитывается.

Это – установившиеся, стационарные колебания под действием вынуждающей силы. Здесь

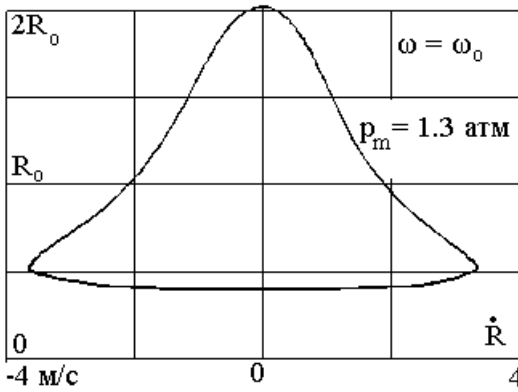


Рис.5.

Фазовый портрет этих колебаний показан на рис.5. У нас фазовый портрет – это зависимость радиуса пузырька от скорости. На фазовом портрете видно, что колебания периодические. Кривая хоть и не похожа на эллипс, характерный для линейного осциллятора, но замкнута и не имеет пересечений. Если увеличить амплитуду вынуждающей силы до двух атмосфер, то спектр колебаний будет содержать не только

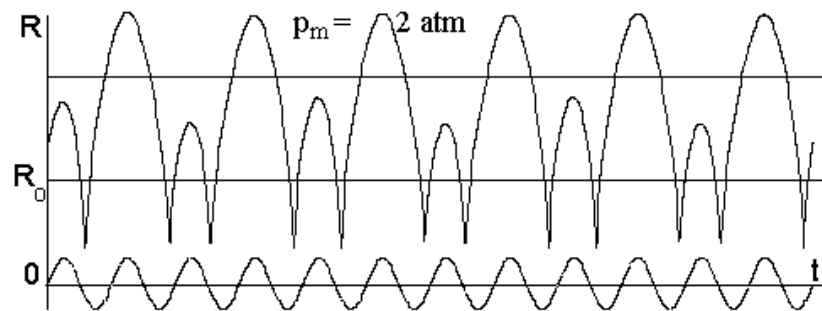
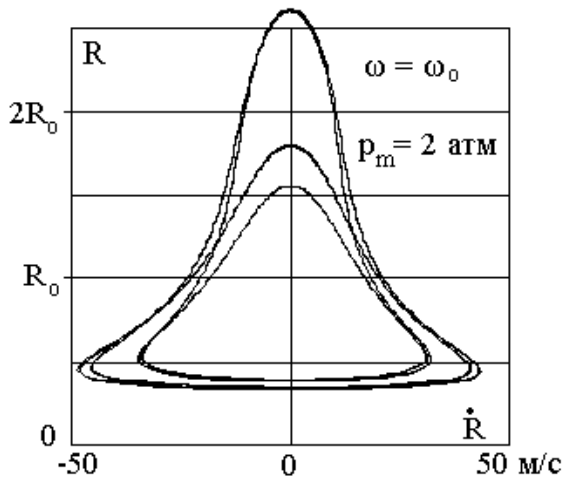


Рис.6.

гармоники, то есть спектральные составляющие с частотами выше частоты вынуждающей силы, но и **субгармоники** –



составляющие, частоты которых в целое число раз меньше частоты вынуждающей силы. Например, субгармоника 1/2 есть спектральная составляющая с частотой вдвое меньше частоты вынуждающей силы. На графике рис.6 отчётливо видно наличие колебаний с

Рис.7.

частотами вдвое (большие пики повторяются через два периода вынуждающей силы) и

вчетверо меньше частоты вынуждающей силы (маленькие пики повторяются через четыре периода). Форма колебаний вынуждающей силы – это нижняя синусоида на этом рисунке.

Линия фазовой траектории этих колебаний на рис.7 стала более сложной, пересекающейся, но осталась замкнутой. Колебания нелинейные, но периодические.

При дальнейшем увеличении амплитуды акустической волны – вынуждающей силы для пульсаций нашего пузырька – происходит переход от периодических колебаний к непериодическим, хаотическим колебаниям. В нашем случае переход происходит при

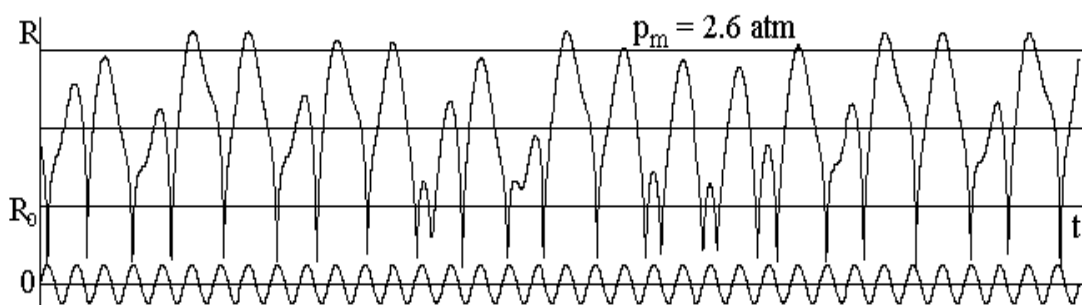
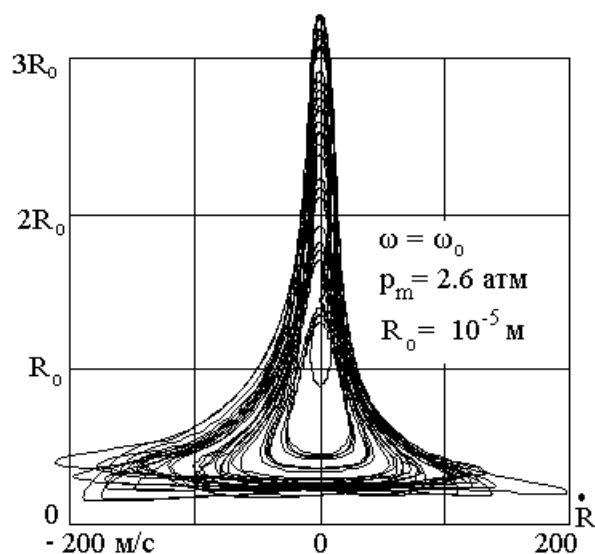


Рис.8.

давлении $p_m = 2.1$ атм. График такого непериодического колебания приведён на рис.8 в течение 36 периодов вынуждающей силы, а фазовый портрет – на рис.9 в течение 48 периодов.



Фазовый портрет великолепен!

Заметно явное сходство с предыдущим портретом. Процесс превращения периодических колебаний в хаос шёл следующим образом: в спектре колебаний, кроме обычных для нелинейных процессов высших гармоник, появилась составляющая с частотой вдвое ниже частоты вынуждающей силы. Она называется "субгармоника 1/2".

Рис.9.

При дальнейшем увеличении амплитуды вынуждающей силы появляются субгармоники 1/4 и 3/4, а в некоторых случаях и 1/3 и 2/3. Дальше появляется 1/8, после чего уже наступает хаос. В этом хаосе есть явные закономерности. Амплитуды

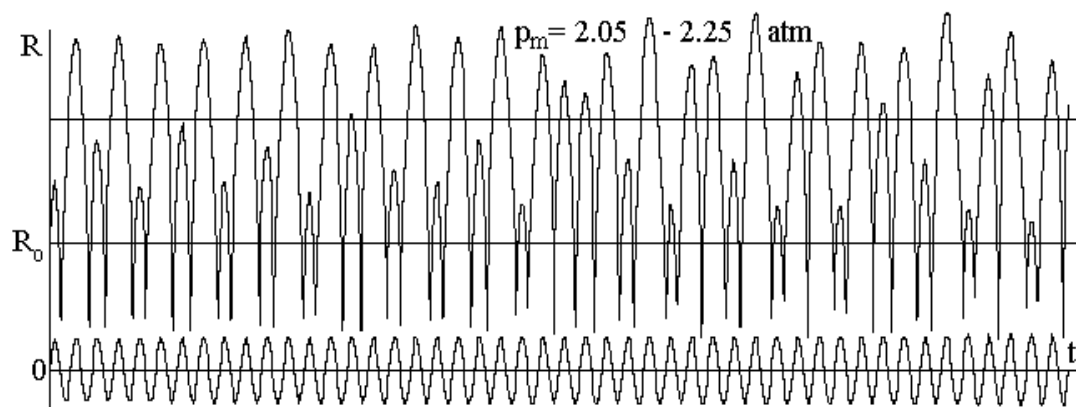
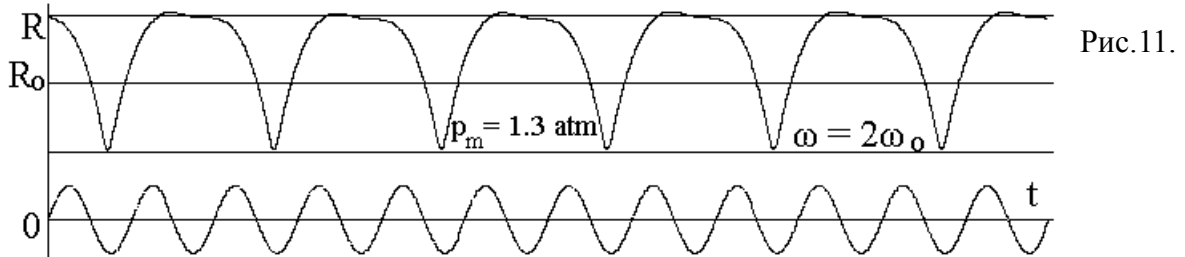


Рис.10.

координаты и скорости не выходят за некие предельные значения, а внутри фигуры есть таинственные окна.

Процесс перехода к хаосу показан на рис.10, где приведены результаты вычислений с линейно растущей амплитудой вынуждающей силы. Рост достаточно медленный – на 10% за 48 периодов.

На предыдущих рисунках были показаны колебания под действием силы с частотой, равной резонансной частоте пузырька. На рис.11 показаны колебания под действием



силы с частотой вдвое выше резонансной. Возбуждаются колебания на субгармонике 1/2, которая является резонансной частотой пузырька.

§ 5. ПОГЛОЩЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА.

Наличие в жидкости пузырьков газа решительным образом меняет её свойства. Жидкость очень плохо сжимается. Пузырьки газа сжимаются легко, и их сжимаемость зависит от частоты. Это значит, что скорость звука тоже зависит от частоты. Попробуем применить наши знания о пульсации одиночного пузырька в решении линейной задачи распространения акустической волны в среде с пузырьками газа. Даже линейная задача о вычислении дисперсии скорости звука и диссипации оказывается весьма непростой. Нелинейные задачи были решены лишь для некоторых частных случаев. Ограничимся только линейной задачей.

Если среда бездиссипативная, то плоская волна может быть записана в виде: $\exp i(\omega t - kx)$, где волновое число $k = \omega/C_{ph}$ – вещественно. Здесь C_{ph} – фазовая скорость звука. Если есть поглощение, то волновое число будет состоять из вещественной части, которая по-прежнему равна ω/C_{ph} и мнимой части, которая отвечает за поглощение: $\tilde{k} = k_1 + ik_2$. Плоскую волну можно записать в виде: $\exp i(\omega t - \tilde{k}x) = \exp i(\omega t - k_1x) \cdot \exp -k_2x$. Получается, что $(-k_2) = \alpha$, где α – коэффициент поглощения.

Если волновое число – комплексное, то скорость звука \tilde{C} тоже будет комплексной (М.А.Исакович). По правде говоря, скорость звука можно считать вещественной константой в редких случаях – когда волна распространяется без изменения формы.

$$\tilde{C} = \frac{\omega}{\tilde{k}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \tilde{\kappa}}}, \text{ где } \tilde{\kappa} \text{ – комплексная сжимаемость.}$$

$$\text{Так как } \tilde{\kappa} = \omega \sqrt{\rho_0 \tilde{\kappa}}, \text{ то } \alpha = -\text{Im } \tilde{k} = -\omega \sqrt{\rho_0} \text{Im } \sqrt{\tilde{\kappa}}. \quad (12)$$

$$C_{ph} = \frac{\omega}{\text{Re } \tilde{k}} = \frac{\omega}{\text{Re } \omega \sqrt{\rho_0 \tilde{\kappa}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0} \text{Re } \sqrt{\tilde{\kappa}}}. \quad (13)$$

Что такое комплексная сжимаемость? В линейной задаче давление в акустической

волне, действующей на пузырёк, можно записать в виде: $p = p_m \exp(i\omega t)$. Объём пузырька пульсирует по гармоническому закону $V = \tilde{V} \exp(i\omega t)$. \tilde{V} определяет зависимость амплитуды и фазы колебаний от частоты, а $\exp(i\omega t)$ – только форму колебаний. По определению сжимаемость будет:

$$\tilde{\kappa} = -\frac{1}{V_0} \frac{d\tilde{V}}{dp} = -\frac{1}{V_0} \frac{d\tilde{V}}{dt} \frac{dt}{dp} = -\frac{1}{V_0} \frac{\frac{d\tilde{V}}{dt}}{\frac{dp}{dt}} = -\frac{1}{V_0} \frac{i\omega \tilde{V} e^{i\omega t}}{i\omega p_m e^{i\omega t}} = -\frac{1}{V_0} \frac{\tilde{V}}{p_m}.$$

Для линейной зависимости $\tilde{V}(p_m)$ частотная и фазовая характеристики \tilde{V} и $\tilde{\kappa}$ совпадают, то есть если $\tilde{V} = a_2 + b_2 \tilde{p}_m$, то $\tilde{\kappa} \sim b_2$.

Воспользуемся уравнением (9) и запишем его для изменения объёма $\Delta V = 4\pi R_0^2 x$.

$$\text{Тогда: } x = \frac{\Delta V}{4\pi R_0^2}; \quad \dot{x} = \frac{\Delta \dot{V}}{4\pi R_0^2}; \quad \ddot{x} = \frac{\Delta \ddot{V}}{4\pi R_0^2}; \quad V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3.$$

Уравнение (9) будет иметь вид:

$$\Delta \ddot{V} + g\Delta \dot{V} + \omega_0^2 \Delta V = a 4\pi R_0^2 \sin \omega t = -q p_m \sin \omega t. \quad \text{Здесь } a = -\frac{p_m}{\rho_0 R_0}, \quad q = \frac{4\pi R_0}{\rho_0}.$$

Вспомнив решение для x , можно сразу написать решение для ΔV :

$$\Delta V = -\frac{4\pi R_0 p_m}{\rho_0} \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2}} \exp i(\omega t + \varphi) = -\frac{V_0 p_m}{\gamma_{\text{gas}} p_0} \frac{\exp i(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2}}; \quad (14)$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{\delta\Omega}{1-\Omega^2}. \quad \text{Здесь } \omega_0^2 = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0 R^2}}.$$

Формула (14) содержит сомножитель вида:

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} e^{i\varphi} = \frac{1}{A^2 + B^2} \sqrt{A^2 + B^2} e^{i\varphi} = \left(\text{ввиду того, что } \text{tg } \varphi = -\frac{B}{A} \right) = \\ = \frac{1}{A^2 + B^2} (A - iB) = \frac{1}{A + iB}.$$

$$\text{Окончательно: } \Delta V = \tilde{V} e^{i\omega t}, \quad \tilde{V} = -\frac{V_0 p_m}{\gamma p_0} \frac{1}{(1-\Omega^2) + i(\delta\Omega)}.$$

Для одного пузырька сжимаемость будет:

$$\tilde{\kappa} = -\frac{1}{V_0 p_m} \frac{\tilde{V}}{\tilde{V}} = \frac{1}{\gamma_2 p_0} \frac{1}{(1-\Omega^2) + i\delta\Omega}.$$

Для смеси с объёмной концентрацией пузырьков газа β сжимаемость будет:

$$\tilde{\kappa} = (1-\beta)\kappa_1 + \beta\tilde{\kappa}_2. \quad \tilde{\kappa} = \frac{1-\beta}{\gamma_1 p^*} + \frac{\beta}{\gamma_2 p_0 (1-\Omega^2 + i\delta\Omega)}.$$

Здесь κ_1 – сжимаемость жидкости, $\kappa_1 = 1/(\gamma_1 p^*)$, γ_1 – показатель степени уравнения Тэта для жидкости, p^* – эмпирический параметр того же уравнения, $\tilde{\kappa}_2$ – комплексная сжимаемость пузырьков газа, γ_2 – показатель степени адиабаты Пуассона для газа, p_0 – давление в пузырьке, равное атмосферному давлению.

При стремлении безразмерной частоты к нулю получается квазистатическая сжимаемость.

При очень маленьких концентрациях пузырьков $\beta \ll 1$, $1 - \beta \approx 1$ и формула упрощается: $\tilde{\kappa} \approx \frac{1}{\gamma_1 p^*} \left(1 + \frac{\beta \gamma_1 p^*}{\gamma_2 p_0} \frac{1}{(1 - \Omega^2 + i\delta\Omega)} \right)$. (15)

Вспомним, что коэффициент поглощения пропорционален корню из мнимой части этой комплексной сжимаемости. Для вычисления корня вычислим отношение сжимаемостей воды и воздуха: $(\gamma_1 p^*)/(\gamma_2 p_0) = (7 \cdot 3000)/(1.4 \cdot 1) = 15000$. Придётся потребовать, чтобы $\beta \ll 10^{-5}$.

$$\text{Тогда: } \sqrt{\tilde{\kappa}} \approx \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 p^*}} \left(1 + \frac{1}{2} \beta \frac{\gamma_1 p^*}{\gamma_2 p_0} \frac{1}{(1 - \Omega^2 + i\delta\Omega)} \right). \quad (16)$$

Конечно, законность приближённого вычисления корня из комплексного числа нужно было бы доказать.

Вспомнив (12) и умножив (16) на $(1 - \Omega^2 - i\delta\Omega)$ получим выражение для α :

$$\alpha = \omega \sqrt{\rho_0} \frac{1}{2} \beta \frac{\sqrt{\gamma_1 p^*}}{\gamma_2 p_0} \frac{\delta\Omega}{(1 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\beta}{R_0} \sqrt{\frac{\gamma_1 p^*}{\gamma_2 p_0}} \frac{\delta\Omega}{((1 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2)}. \quad (17)$$

Аналогично вычислим скорость звука из формулы (13):

$$C_{ph} \approx \frac{1}{\sqrt{\rho_0} \operatorname{Re} \sqrt{\tilde{\kappa}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \frac{\sqrt{\gamma_1 p^*}}{\left(1 + \frac{1}{2} \beta \frac{\gamma_1 p^*}{\gamma_2 p_0} \frac{1 - \Omega^2}{((1 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2)} \right)} \approx \sqrt{\frac{\gamma_1 p^*}{\rho_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \beta \frac{\gamma_1 p^*}{\gamma_2 p_0} \frac{1 - \Omega^2}{((1 - \Omega^2)^2 + (\delta\Omega)^2)} \right). \quad (18)$$

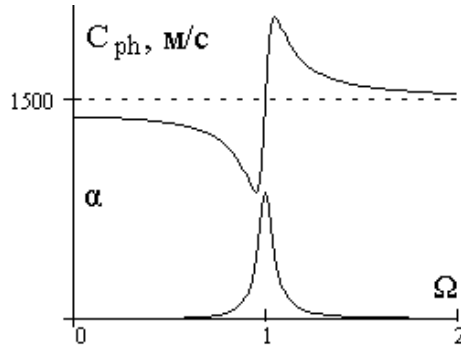


Рис. 12.

На рисунке представлены графики зависимостей C_{ph} и α от безразмерной частоты для воды с пузырьками воздуха. $\beta = 10^{-5}$, $R_0 = 10^{-5}$ м, $\gamma_1 = 7$, $p^* = 3200 \cdot 10^5$ Па, $\gamma_2 = 1.4$, $p_0 = 10^5$ Па, $\delta = 0.1$. Скорость звука на низких частотах меньше, чем скорость звука в воде без пузырьков газа. Это обусловлено тем, что пузырьки газа увеличивают сжимаемость среды. На частотах чуть ниже резонансной пузырьки пульсируют в фазе с волной накачки, сжимаемость. На частотах чуть выше резонансной пузырьки пульсируют в противофазе и уменьшают сжимаемость жидкости. Жидкость с пузырьками становится более жесткой, чем чистая и скорость звука в ней больше, чем в чистой жидкости! На высоких частотах скорость стремится к скорости в чистой жидкости. Поглощение – резонансного типа, в максимуме $1/\alpha \approx 10$ см. Вид кривой поглощения и дисперсионной кривой зависит, конечно, от добротности пузырьков. Эти кривые – для добротности $Q = 10$.

Что будет, если β будет не таким маленьким? Тогда формулы будут посложнее. Однако такой случай будет сложным ещё и потому, что при $\beta > 10^{-5}$ пузырьки будут находиться слишком близко друг от друга и жидкость, окружающую их, уже нельзя

будет считать несжимаемой. Нужно будет учитывать взаимное влияние пузырьков. Это сделает задачу неразрешимой.

Всё, что было написано про среду с пузырьками газа верно только в том случае, когда среду можно считать сплошной. И радиус пузырьков, и расстояние между ними должны быть много меньше длин акустических волн. $R_0 \ll \lambda$ и $l \ll \lambda$, l – расстояние между равномерно распределёнными в среде одинаковыми пузырьками газа.

Если пузырьки разных размеров, то задача заключается в вычислении зависимости комплексной сжимаемости от частоты. Если есть аналитическая или эмпирическая функция распределения пузырьков по размерам $n(R)$, то число пузырьков с радиусами от R до $R + dR$ в единице объёма будет $n(R) dR$. Тогда выражение для комплексной сжимаемости можно будет записать в виде интеграла по R :

$$\kappa = \frac{1-\beta}{\gamma_1 P^*} + \frac{1}{\gamma_2 P_0} \frac{4\pi}{3} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{n(R) R^3 dR}{1 - \frac{\omega^2 R^2 \rho_0}{3\gamma P_0} + i \frac{g R^2 \rho_0 \omega}{3\gamma P_0}} \quad (19)$$

Как и прежде, для маленьких концентраций можно сделать упрощение при извлечении корня и проинтегрировать при каждой конкретной частоте ω . Тогда:

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\rho_0}}{2} \frac{\sqrt{\gamma_1 P^*}}{\gamma_2 P_0} \frac{4\pi}{3} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{\delta\omega n(R) R^3 dR}{\left(1 - \frac{\omega^2 R^2 \rho_0}{3\gamma P_0}\right)^2 + \left(\frac{g R^2 \rho_0 \omega}{3\gamma P_0}\right)^2}$$

Аналогичная формула получается и для C_{ph} . Если пузырьки разные резонансная кривая поглощения расплывается, а дисперсионная кривая сглаживается, уменьшаются минимум и максимум, почти исчезает участок уменьшения скорости звука. Дисперсионная кривая приобретает релаксационный вид.

Важно обратить внимание на то, что область дисперсионной кривой, где скорость меняется с частотой, попадает в «полосу непрозрачности», то есть в область больших коэффициентов поглощения. На резонансе волна поглощается в e раз на десяти сантиметрах!

Если в жидкости с пузырьками различных размеров будут распространяться импульсные волны с широким спектром, то возможны два типа эволюции их формы:

1. Из импульса интенсивно поглощаются высокочастотные составляющие, а низкочастотные распространяются со скоростью C_{00} . Дисперсионные явления отсутствуют или проявляются слабо.

2. В спектральном составе импульса есть очень высокочастотные составляющие, с частотами выше резонансных для самых маленьких пузырьков. Это могут быть импульсные волны, генерируемые химическими ВВ. Тогда основная часть импульса распространяется так же, как в первом случае, но впереди него, со скоростью звука в чистой жидкости, бежит короткий, быстро поглощающийся предвестник.

§ 6. ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА. МОДЕЛЬ ЛЯХОВА.

В предыдущих параграфах мы рассмотрели пульсации газовых пузырьков в жидкости и влияние этих пульсаций на распространение акустических волн. Из формулы для частоты собственных колебаний мы установили, что во многих случаях жидкость можно считать несжимаемой. Затем было выведено уравнение Рэлея. Это – нелинейное дифференциальное уравнение, которое можно решить лишь для некоторых частных случаев. Сам Рэлей решил задачу о схлопывании пузырька, внутри которого – вакуум.

Решая это уравнение в предположении малости нелинейных эффектов мы получили существенно нелинейный эффект – двугорбую резонансную кривую.

Было решено линеаризованное уравнение колебаний объёма пузырька. Это позволило получить дисперсионную кривую и частотную зависимость поглощения при распространении линейно-акустических волн в жидкости с пузырьками газа. Оказалось, что эффективно распространяться могут лишь волны с частотами ниже резонансной частоты газовых пузырьков. Кроме того, решение линейной задачи показало, что модель среды с пульсирующими пузырьками сложна. Если вычислять объёмы пузырьков из нелинейного уравнения Рэлея или Херринга-Флинна, то задача станет гораздо сложнее.

Сложные модели не могут быть плодотворными. Поэтому существует много упрощённых моделей сред с пузырьками различной степени сложности и плодотворности. Рассмотрим две простейшие модели Г.М.Ляхова – с эффективной вязкостью и квазистатическую (бездиссипативную). Среду будем рассматривать в континуальном приближении, то есть считать сплошной средой, наделённой некими эффективными физическими характеристиками. Чтобы считать такую среду сплошной нужно, чтобы и радиусы пузырьков R_0 , и расстояния между ними L были малы по сравнению с длиной звуковой волны. $R_0/\lambda \ll 1$, $L/\lambda \ll 1$.

Георгий Михайлович Ляхов разработал модель трёхкомпонентной среды, состоящей из газовых пузырьков, твёрдых частиц и жидкости. Таков, например, водонасыщенный грунт. Он, как правило, состоит из песка, воды и пузырьков воздуха. В этой главе, для простоты, ограничимся двухкомпонентной средой – жидкость + газ. Потом в наши формулы можно будет добавить и третью (и четвёртую) компоненты.

Объёмная концентрация пузырьков газа $\beta = V_{0g}/V_0$, где V_0 – первоначальный объём смеси, а V_{0g} – первоначальный объём пузырьков газа. Для того, чтобы сконструировать уравнение состояния смеси жидкости с пузырьками газа, запишем отношение объёма смеси V и её компонент V_{0g} и V_{0L} под действием некоторого давления Δp к первоначальному невозмущённому объёму V_0 :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V_g}{V_0} + \frac{V_L}{V_0} = \beta \frac{V_g}{V_{0g}} + (1 - \beta) \frac{V_L}{V_{0L}}, \quad \beta = \frac{V_{0g}}{V_0}. \quad (21)$$

Здесь V_{0L} – невозмущённый объём жидкости.

В чистой жидкости, без пузырьков газа, поглощение и дисперсия скорости звука ничтожно малы по сравнению с жидкостью с пузырьками. В этом случае можно для описания жидкой компоненты взять уравнение Тэта, а всю диссипацию и дисперсию считать обусловленной пузырьками газа. Тогда:

$$\frac{p}{p_L^*} = \frac{\Delta p}{p_L^*} + 1 = \left(\frac{V_L}{V_{0L}} \right)^{-\gamma_L}; \quad \frac{V_L}{V_{0L}} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_L}}. \quad (22)$$

Теперь – самое важное! Пренебрежём инерцией присоединённой массы жидкости. Она не будет сказываться на частотах, ниже резонансной частоты пузырьков. А волны с частотами, близкими к резонансной, практически не распространяются из-за сильного поглощения. Будем считать пузырёк демпфером, то есть при его сжатии будет возникать сила, похожая на силу трения.

Тогда внешнее давление будет действовать как против давления газа внутри пузырька так и против некоторой силы трения, пропорциональной (как и многие другие диссипативные силы) скорости деформации.

$$\Delta p = p_0 \left(\left(\frac{V_g}{V_{0g}} \right)^{-\gamma_g} - 1 \right) - \eta \left(\frac{\dot{V}_g}{V_{0g}} \right). \quad (23)$$

Знак минус перед диссипативным членом стоит потому, что при сжатии скорость изменения объёма отрицательна; η – некий аналог вязкости. Будем называть его коэффициентом искусственной вязкости.

$$\text{Отсюда:} \quad \frac{V_g}{V_{0g}} = \left(\left(\frac{\Delta p}{p_0} + 1 \right) + \frac{\eta}{p_0} \frac{\dot{V}_g}{V_{0g}} \right)^{-\frac{1}{\gamma_g}}. \quad (24)$$

Подставим (22) и (24) в (21):

$$\frac{V}{V_0} = \beta \left(\left(\frac{\Delta p}{p_0} + 1 \right) + \frac{\eta}{p_0} \frac{\dot{V}_g}{V_{0g}} \right)^{-\frac{1}{\gamma_g}} + (1 - \beta) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_L}}. \quad (25)$$

Нужно постараться как либо убрать \dot{V}_g , так как уравнение состояния, даже если оно дифференциальное, может содержать V и \dot{V} , но не объёмы и скорости сжатия отдельных компонент. Выразим \dot{V}_g из этого уравнения:

$$\frac{\dot{V}_g}{V_{0g}} = \frac{p_0}{\eta} \left(\beta^{\gamma_g} \left(\frac{V}{V_0} - (1 - \beta) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_L}} \right)^{-\gamma_g} - \left(\frac{\Delta p}{p_0} + 1 \right) \right) = \Psi_1 \left(\Delta p, \frac{V}{V_0} \right). \quad (26)$$

Теперь продифференцируем по времени уравнение (21) и избавимся, наконец, от \dot{V}_g .

$$\frac{\dot{V}}{V_0} = \beta \frac{\dot{V}_g}{V_{0g}} + (1 - \beta) \frac{\dot{V}_L}{V_{0L}}. \quad (25)$$

Оставим первый член для подстановки в (26), а второй возьмём из (22), продифференцировав его по времени:

$$\frac{\dot{V}}{V_0} = \beta \frac{\dot{V}_g}{V_{0g}} - \frac{1 - \beta}{p_L^* \gamma_L} \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{\gamma_L + 1}{\gamma_L}} \cdot \Delta \dot{p}. \quad (28)$$

Теперь можно подставить (26) в (28), тем самым исключив \dot{V}_g / V_{0g} . Это можно сделать только потому, что мы взяли уравнение состояния с диссипативным членом только для газовой компоненты. Сам Г.М.Ляхов использовал данные многочисленных экспериментов, в которых волны в водонасыщенных грунтах с пузырьками газа поглощались намного сильнее, чем в грунтах без пузырьков.

Получается дифференциальное уравнение состояния (29), связывающее скорость изменения объёма и объём с давлением Δp и скоростью изменения давления $\Delta \dot{p}$. Это – уравнение состояния Ляхова с искусственной вязкостью. Первоначально оно было

написано для трёхкомпонентной среды.

$$\frac{\dot{V}}{V_0} = \beta \Psi_1 \left(\Delta p, \frac{V}{V_0} \right) + \Psi_2(\Delta p) \cdot \Delta \dot{p} . \quad (29)$$

$$\text{Здесь: } \Psi_2 = - \frac{1-\beta}{p_L^* \gamma_L} \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{\gamma_L+1}{\gamma_L}} .$$

Уравнение, конечно, сложное. Аналитические расчёты с использованием этого уравнения нам неизвестны. Решено много численных задач распространения ударных волн в многокомпонентных средах с использованием этого уравнения состояния. В одной из работ получено хорошее согласие с нашими экспериментальными данными.

Исследуем это уравнение в предельных случаях. Если $\dot{V} \rightarrow \infty$ и $\Delta \dot{p} \rightarrow \infty$, то первый член в (23) – прибавка давления за счёт сжатия газа в пузырьке – много меньше второго и $\Delta p \approx -\eta \frac{\dot{V}_g}{V_{0g}}$. Подставив это в первую скобку (25), обнаруживаем, что в ней останется только единица и в случае очень быстрого сжатия уравнение будет иметь

$$\text{вид: } \frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \beta + (1-\beta) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_L}} . \quad (30)$$

Это уравнение, в котором газовая компонента не сжимается, приведёт к существованию другой скорости распространения высокочастотных волн. Такой эффект у нас уже встречался в § 5.

Для медленного, квазистатического сжатия среды из (25) при $\dot{V} \rightarrow 0$ получается так называемое квазистатическое уравнение состояния многокомпонентной среды:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \beta \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma_g}} + (1-\beta) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_L}} . \quad (31)$$

Заметим, что здесь давления в обеих компонентах равны.

§ 7. СКОРОСТЬ ЗВУКА В КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. СКОРОСТЬ ФРОНТА УВ.

Наше уравнение состояния (31) – это зависимость плотности среды от давления. Перепишем его в более удобном виде и сразу для двух вариантов – для двухкомпонентной среды и для среды, в которой больше двух компонент:

$$\rho = \rho_0 \left(\beta \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma_g}} + (1-\beta) \left(1 + \frac{\Delta p}{p_L^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_L}} \right)^{-1} . \quad \rho = \rho_0 \left(\sum_i \beta_i \left(1 + \frac{\Delta p}{p_i^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} \right)^{-1} . \quad (31a)$$

Здесь β_i – объёмная концентрация i -той компоненты, γ_i и p_i^* – параметры уравнения состояния i -той компоненты. Теперь найдём скорость звука для этой модели:

$$C_0^2 = \frac{1}{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\substack{\rho \rightarrow \rho_0 \\ \Delta p \rightarrow 0}}} .$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \rho_0 \left(\sum_i \beta_i \left(1 + \frac{\Delta p}{p_i^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} \right)^{-2} \cdot \sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \left(1 + \frac{\Delta p}{p_i^*} \right)^{-\frac{\gamma_i+1}{\gamma_i}} \cdot \text{Учтём, что } \sum_i \beta_i = 1.$$

Тогда, при $\Delta p \rightarrow 0$ получим:

$$C_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \cdot \sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*}} = \text{или для двух компонент} = \frac{1}{\rho_0 \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1-\beta}{\gamma_L p_L^*} \right)}. \quad (32)$$

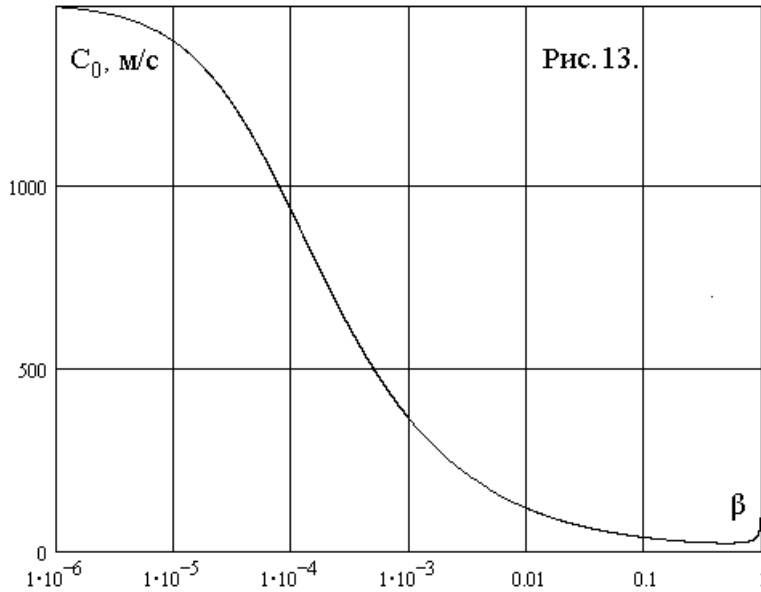


Рис. 13.

В этих формулах ρ_0 – это плотность смеси нескольких компонентов. Для жидкости с пузырьками:

$$\rho_0 = \beta \rho_{0g} + (1 - \beta) \rho_{0L}.$$

График зависимости скорости звука в воде с пузырьками воздуха от объёмной концентрации пузырьков воздуха β представлен на рис.13. При маленьких концентрациях скорость стремится к скорости в чистой воде.

При стремлении концентрации к единице, скорость стремится к скорости звука в воздухе. Удивительнее всего – то, что при концентрации пузырьков газа в 50%, скорость звука равна 23 м/с. Это намного меньше и скорости звука и в воде, и в воздухе! Объясняется это тем, что при таких концентрациях газа сжимаемость смеси определяется газом, а плотность – жидкостью.

Кроме скорости звука из уравнения состояния легко получить формулу для скорости фронта УВ. Вспомним закон сохранения массы на фронте в первой главе:

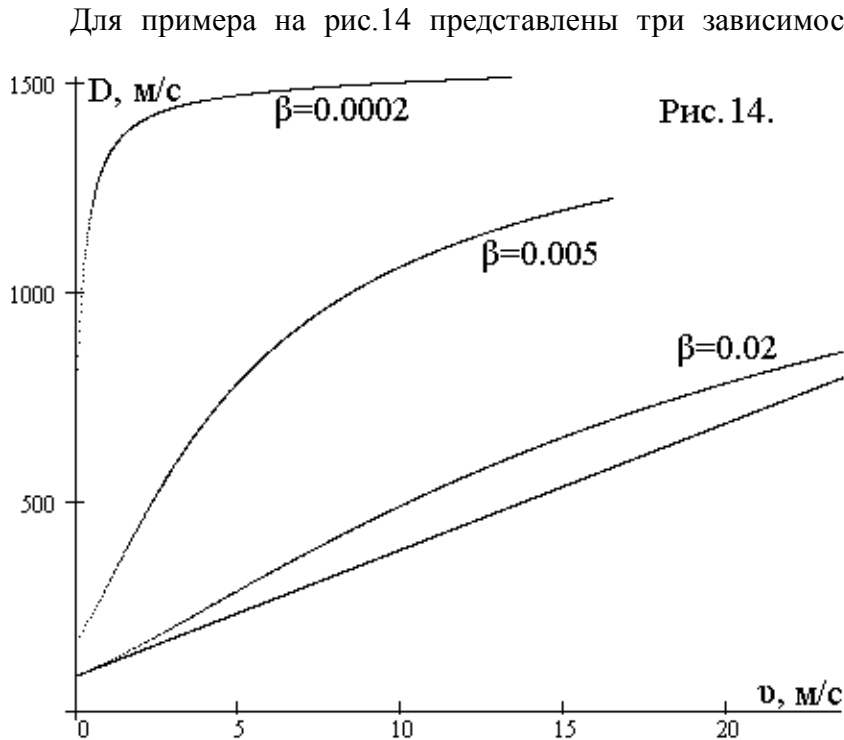
$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{v}{D} = \frac{\Delta p}{\rho_0 D^2}; \quad D^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\Delta p}{\rho_0 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)}.$$

Из (29а):

$$D^2 = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left(1 - \sum_i \beta_i \left(1 + \frac{\Delta p}{p_i^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} \right)^{-1}. \quad (33)$$

Так как $v = \Delta p / (\rho_0 D)$, то:

$$v^2 = \frac{\Delta p^2}{\rho_0^2 D^2} = \frac{\Delta p}{\rho_0} \left(1 - \sum_i \beta_i \left(1 + \frac{\Delta p}{p_i^*} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} \right). \quad (34)$$



При больших давлениях скорость ударных волн стремится к скорости чистой воде. При большей концентрации пузырьков газа скорость слабых волн на два порядка меньше, чем скорость в чистой воде. Скорость УВ медленно растёт с увеличением массовой скорости. Для сравнения, вместе с зависимостью $D(v)$ для концентрации пузырьков газа $\beta = 2\%$, построенной по формулам Ляхова приведена прямая,

построенная по приближенной формуле (25) из первой главы $D = C_0 + \frac{1}{2}\varepsilon v$. Здесь $C_0 = 84$ м/с, $\varepsilon = 60$. Как вычислить нелинейный параметр будет написано в §8. При концентрациях порядка 10^{-3} – 10^{-4} зависимость $D(v)$ чрезвычайно сильная. Уже при небольших давлениях (и массовых скоростях) в УВ скорость фронта достигает скорости в чистой жидкости.

§ 8. НЕЛИНЕЙНЫЙ ПАРАМЕТР МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ.

При использовании уравнения состояния Ляхова зависимости скорости фронта УВ от массовой скорости при небольших скоростях имеют линейный участок. Вспомним, что при использовании уравнения состояния Тэта или адиабаты Пуассона при небольших значениях γM тоже получалась линейная зависимость $D(v)$.

Зададимся целью заменить уравнение состояния Ляхова адиабатой Пуассона на начальном участке, при небольших изменениях плотности и давления, то есть при небольших γM . Тогда можно будет найти эффективные значения нелинейного параметра γ и p^* для многокомпонентной среды. Эти параметры удобнее, чем параметры уравнения Ляхова, так как весь аппарат нелинейной акустики разработан с применением адиабаты Пуассона.

Можно дважды продифференцировать адиабату Пуассона: $(p/p_0) = (\rho/\rho_0)^\gamma$.

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma-1}{\rho_0} \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma-1}{\rho_0} C_0^2. \quad \text{Отсюда:} \quad \gamma = 1 + \frac{\rho_0}{C_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}.$$

Продифференцировав два раза (31a) можно получить формулу для нелинейного параметра γ . Кстати, если уравнение состояния линейное, например, изотерма Бойля-Мариотта, то $p/p_0 = \rho/\rho_0$, и $\gamma = 1$. Тогда: $D = C_0 + \frac{1}{2}v$. Даже если нет нелинейности, связанной с уравнением состояния, скорость фронта УВ волны всё равно зависит от амплитуды за счёт гидродинамической нелинейности. Гидродинамическая

нелинейность происходит от второго члена в уравнении Эйлера. Вывод: нелинейные явления могут происходить и в линейных средах, а нелинейные эффекты происходят из двух источников – нелинейности уравнения состояния и нелинейности уравнения движения.

Проще получить нелинейный параметр прямо из формул (33) и (34).

$$\text{Так как } D = C_0 + \frac{\gamma+1}{4} v, \text{ то } \frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\gamma+1}{4}; \quad \gamma = 4 \frac{\partial D}{\partial v} - 1 = 4 \left(\frac{\partial D}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} \right) - 1.$$

Осталось вычислить производные от D и v по p . Извлечём квадратный корень из (33) и разложим выражение во внутренней скобке по формуле бинома Ньютона, оставив не только линейный, но и квадратичный член. Остальные можно выбросить из-за малости $(\Delta p/p_i^*)$.

$$D \approx \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_0}} \left(1 - \sum_i \beta_i \left(1 - \frac{\Delta p}{\gamma_i p_i^*} + \frac{(\gamma_i + 1) \Delta p^2}{2(\gamma_i p_i^*)^2} - \dots \right) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Вспомним, что $\sum_i \beta_i = 1$. Тогда единицы сокращаются и

$$D = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_0}} \left(\sum_i \beta_i \frac{\Delta p}{\gamma_i p_i^*} \left(1 - \frac{(\gamma_i + 1) \Delta p}{2 \gamma_i p_i^*} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left(\sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \left(1 - \frac{(\gamma_i + 1) \Delta p}{2 \gamma_i p_i^*} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\left. \frac{\partial D}{\partial p} \right|_{\Delta p \rightarrow 0} = \frac{+1}{\sqrt{\rho_0}} \frac{\sum_i \beta_i \frac{\gamma_i + 1}{2(\gamma_i p_i^*)^2}}{2 \cdot \left(\sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \left(1 - \frac{(\gamma_i + 1) \Delta p}{2 \gamma_i p_i^*} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\rho_0}} \frac{\sum_i \beta_i \frac{\gamma_i + 1}{(\gamma_i p_i^*)^2}}{\left(\sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (35)$$

$$\text{Аналогично: } v = \frac{\Delta p}{\sqrt{\rho_0}} \left(\sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \left(1 - \frac{(\gamma_i + 1) \Delta p}{2 \gamma_i p_i^*} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Видно, что в отличие от выражения для скорости фронта, здесь можно обойтись без квадратичного члена.

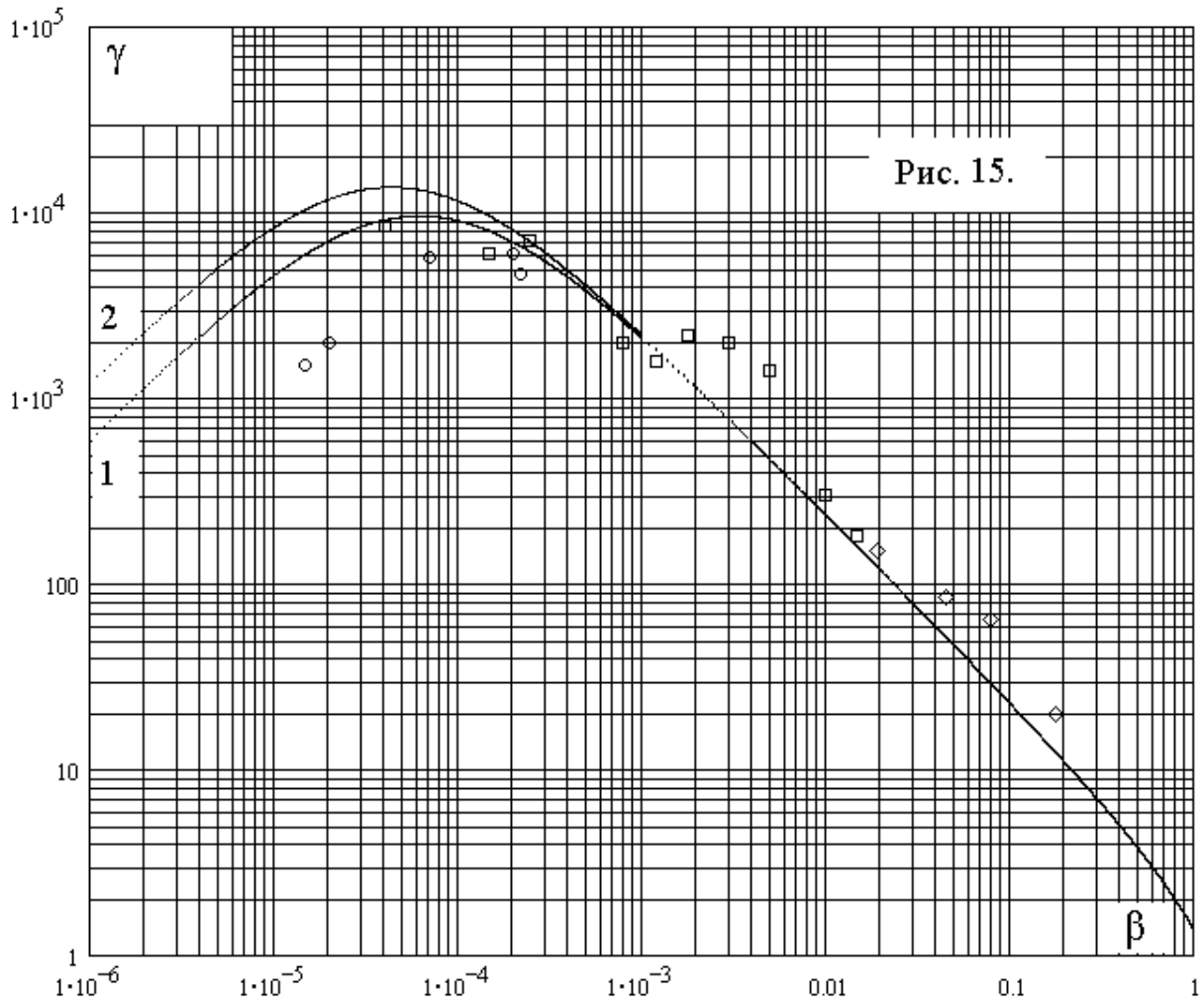
$$\left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_{\Delta p \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \left(\sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

$$\text{Делим (33) на (34) и получаем: } \gamma = 4 \frac{\partial D}{\partial v} - 1 = \frac{\sum_i \beta_i \frac{\gamma_i + 1}{(\gamma_i p_i^*)^2}}{\left(\sum_i \frac{\beta_i}{\gamma_i p_i^*} \right)^2} - 1. \quad (37)$$

Или, для двухкомпонентной среды – для жидкости с пузырьками газа, получим:

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\beta (\gamma_g + 1)}{(\gamma_g p_0)^2} + \frac{(1 - \beta)(\gamma_L + 1)}{(\gamma_L p_L^*)^2} \right)}{\left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1 - \beta}{\gamma_L p_L^*} \right)^2} - 1. \quad (38)$$

Здесь β – объёмная концентрация пузырьков газа. Эта замечательная формула была впервые выведена А.С.Токманом. На рис.15 приведены зависимости нелинейных



параметров γ от концентрации газа для воды с пузырьками (кривая 1) и глицерина с пузырьками (кривая 2). Газ характеризуется только давлением и показателем степени адиабаты Пуассона. Для любого двухатомного газа $\gamma_g = 1.4$. Для воды $\gamma_L = 7$, для глицерина $\gamma_L = 10$. Кружочками показаны результаты экспериментов в глицерине с пузырьками воздуха, квадратиками – в воде с пузырьками водорода, ромбиками – в воде с пузырьками азота. Значения нелинейного параметра жидкостей с пузырьками оказались аномально большими. Они могут на несколько порядков превышать значения нелинейных параметров как газа, так и жидкости. Следует отметить, что при концентрациях $\beta > 10^{-3}$ значение нелинейного параметра не зависит от сорта жидкости и может быть определено по упрощённой формуле: $\gamma = (\gamma_g + 1)/\beta - 1$ или для двухатомного газа (например, для воздуха, который состоит, в основном, из азота N_2 и кислорода O_2) $\gamma = 2.4/\beta - 1$.

Максимум зависимости $\gamma(\beta)$ достигается при малых концентрациях. Вычислим, где он находится. Положим $1 - \beta = 1$ и отметим, что $(\gamma_L p_L^*)/(\gamma_g p_0) = 20000$.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U' V - V' U}{V^2} = 0 ; \text{ то есть } U' V - V' U = 0 .$$

$$V' = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1-\beta}{\gamma_L p_L^*} \right)^2 = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1-\beta}{\gamma_L p_L^*} \right) \left(\frac{1}{\gamma_g p_0} - \frac{1}{\gamma_L p_L^*} \right).$$

Пренебрежём последним членом во второй скобке:

$$\begin{aligned} V' &= 2 \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1-\beta}{\gamma_L p_L^*} \right) \frac{1}{\gamma_g p_0} \quad U'V - V'U = \\ &= \left(\frac{\gamma_g + 1}{(\gamma_g p_0)^2} \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1}{\gamma_L p_L^*} \right)^2 - 2 \left(\frac{\beta(\gamma_g + 1)}{(\gamma_g p_0)^2} + \frac{(\gamma_L + 1)}{(\gamma_L p_L^*)^2} \right) \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1}{\gamma_L p_L^*} \right) \frac{1}{\gamma_g p_0} \right) = \\ &= \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1}{\gamma_L p_L^*} \right) \frac{1}{\gamma_g p_0} \left(\frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g p_0} \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1}{\gamma_L p_L^*} \right) - 2 \left(\frac{\beta(\gamma_g + 1)}{(\gamma_g p_0)^2} + \frac{(\gamma_L + 1)}{(\gamma_L p_L^*)^2} \right) \right) = 0 ; \\ \frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g p_0} \left(\frac{\beta}{\gamma_g p_0} + \frac{1}{\gamma_L p_L^*} \right) &= 2 \left(\frac{\beta(\gamma_g + 1)}{(\gamma_g p_0)^2} + \frac{(\gamma_L + 1)}{(\gamma_L p_L^*)^2} \right) ; \end{aligned}$$

$$\beta_{\max} \left(\frac{\gamma_g + 1}{(\gamma_g p_0)^2} - \frac{2(\gamma_g + 1)}{(\gamma_g p_0)^2} \right) = \frac{2(\gamma_L + 1)}{(\gamma_L p_L^*)^2} - \frac{\gamma_g + 1}{(\gamma_g p_0)^2} ;$$

$$\beta_{\max} = \frac{\gamma_g p_0}{\gamma_g + 1} \left(\frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g p_0 \gamma_L p_L^*} - \frac{2(\gamma_L + 1)}{(\gamma_L p_L^*)^2} \right) = \frac{\gamma_g p_0}{\gamma_L p_L^*} \left(1 - 2 \frac{\gamma_L + 1}{\gamma_g + 1} \frac{\gamma_g p_0}{\gamma_L p_L^*} \right).$$

Второй член в скобке очень мал. Окончательно: $\beta_{\max} = \frac{\gamma_g p_0}{\gamma_L p_L^*}$. (39)

Для воды с пузырьками двухатомного газа, например, воздуха $\beta_{\max} = 6.5 \cdot 10^{-5}$. При этой концентрации сжимаемости жидкости и пузырьков газа сравниваются.

Подставим (39) в (38):

$$\gamma_{\max} = \frac{\gamma_g + 1}{4} \left(\frac{\gamma_L p_L^*}{\gamma_g p_0} \right) = \text{для двухатомного газа} = \frac{0.6}{\beta_{\max}}.$$

Для воды $\gamma_{\max} = 9300$. Для ртути $C_{0\text{Hg}} = 1450$ м/с, $\rho_{0\text{Hg}} = 13600$ кг/м³, $\gamma_{\max} = 120000$. Эти примеры показывают, что для всех конденсированных сред добавление пузырьков газа увеличивает нелинейный параметр на несколько порядков. Это относится и к многокомпонентным средам, например, к водонасыщенным грунтам.

§ 9. ЭКСПЕРИМЕНТЫ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ.

Слабые импульсы сильно поглощаются. Например, в глицерине с концентрацией пузырьков воздуха $\beta = 10^{-3}$ при длительности импульса сжатия в форме полупериода синусоиды с длительностью 100 мксек амплитуда уменьшается в три раза на расстоянии 10 см. Длительность импульса тоже увеличивается в три раза. Это свидетельствует о сильном поглощении высокочастотных спектральных составляющих импульсов сжатия.

Из-за сильного изменения формы импульса трудно измерять скорость звука. Длительность импульса увеличивается, и вершина его распространяется медленнее, чем вступление. Гораздо проще измерять скорость распространения фронта УВ. Мы распространили методику измерения скорости УВ на слабые импульсы, в том числе и на импульсы с изменяющейся формой. На осциллограмме давления в импульсной волне мы проводили касательную в точке наибольшей крутизны фронта. Точка пересечения касательной с нулевой линией считалась временем прохода данной волны к датчику. То же самое делали на другом расстоянии от излучателя и по разности времён прихода волн вычисляли скорость распространения импульса.

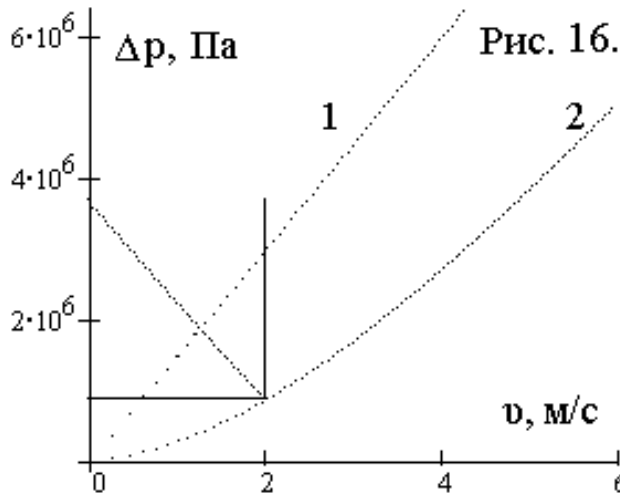
Сильные (ударные) волны распространяются со скоростями в несколько раз превышающими линейно-акустическую скорость звука. Можно измерить скорость распространения УВ и давление на фронте. По известному давлению и скорости вычислить массовую скорость $v = \Delta p / (\rho_0 D)$. Наклон зависимости $D(v)$ даст значение нелинейного параметра γ для данной концентрации пузырьков газа. Концентрацию можно определить по линейно-акустической скорости звука по формуле (32). Пиковое давление в УВ уменьшается при распространении. Мы использовали среднее арифметическое по измерениям в двух точках. Чем ближе точки измерения, тем меньше разница давлений и тем точнее можно сопоставить скорость определённой амплитуде. С другой стороны при уменьшении базы измерений погрешность измерения скорости УВ возрастает. Мы выбирали базу измерений от 4 до 10 см, как правило, 5 см.

Оказалось, что зависимости $D(v)$ для глицерина с пузырьками воздуха, воды с пузырьками воздуха и с пузырьками водорода, водонасыщенных грунтов с различными по плотности твёрдыми компонентами хорошо описываются формулами (33) и (34). Нелинейный параметр, как видно из рис. 6, в пределах невысокой точности эксперимента, согласуется с формулой (38).

Процесс формирования УВ из плавного импульса сжатия в средах с пузырьками имеет свои особенности. В отличие от римановской волны у подошвы образуется плавное вступление, средняя часть фронта становится круче, догоняет подошву и образуется квазиразрывный фронт типичной ударной волны треугольной формы. Ударной волной мы называем импульс характерной треугольной формы с фронтом, длительность которого много меньше длительности импульса.

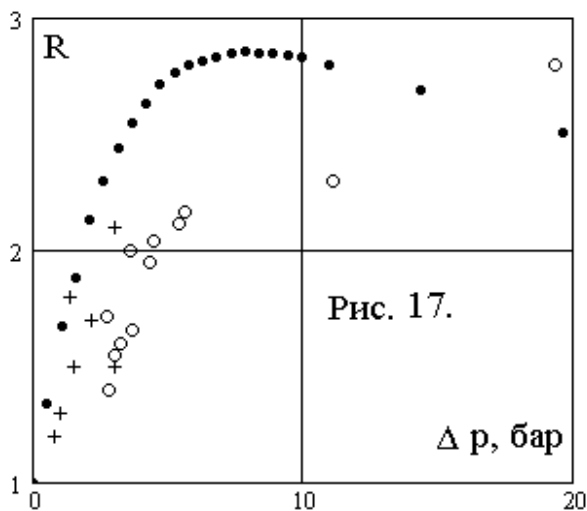
При распространении слабых импульсов высокочастотные составляющие быстро поглощаются, и спектральный состав импульсов обедняется. Скорость распространения высокочастотных составляющих C_∞ равна скорости в чистой жидкости, которая может быть больше низкочастотной скорости звука в жидкости с пузырьками C_{00} на два порядка. Однако при небольших амплитудах поглощение высокочастотных составляющих делает невозможным проявление дисперсионных эффектов. При распространении сильных волн высокочастотные составляющие постоянно генерируются на фронте. Однако сильные волны бегут со скоростью, близкой к скорости в чистой жидкости. Дисперсионные эффекты проявляются слабо. Высокочастотный фронт бежит чуть быстрее основного импульса. При этом образуется характерная двойная вершина.

Поглощение волн тоже сильно зависит от амплитуды. В экспериментах минимальное поглощение наблюдалось при амплитудах порядка 20 бар.



При отражении линейно-акустических волн коэффициент отражения не зависит от амплитуды волны, а зависит от акустического сопротивления сред ρc . Скорости волн в средах с пузырьками зависят от амплитуды. Поэтому, коэффициенты отражения на границах раздела сред с пузырьками должен тоже зависеть от амплитуды волн. Вычислить коэффициент отражения можно с помощью ударных кривых сред по обе стороны границы, как было описано в третьей главе. На рис.16 представлены такие ударные кривые для чистой воды (прямая 1) и для воды с концентрацией пузырьков воздуха $\beta = 0.5\%$ (кривая 2, построенная по формуле (34)). Зависимость коэффициента отражения на границе сплошного глицерина и глицерина с пузырьками воздуха была исследована в лаборатории нелинейной акустики в 1975 году. При исследовании прохождения импульсов сжатия в воде сквозь пленку всплывающих пузырьков водорода была также обнаружена сильная зависимость коэффициента прохождения от амплитуды волны. При достижении некоторой амплитуды слой воды с пузырьками становился акустически прозрачным.

Особенно интересным оказалось исследование отражения ударных волн в глицерине с пузырьками от твердой стенки. В линейной акустике коэффициент отражения от твердой стенки равен единице. Отражённая волна аддитивно складывается с падающей и на границе раздела давление удваивается. Ударная кривая мало отличается от прямой линии. Пример — ударная кривая воды на рис.16. Если волны нелинейные, то есть $\gamma M \sim 1$, то ударную кривую среды нельзя считать прямой. По методу зеркально-симметричной ударной кривой мы должны получить давление в отражённой волне больше, чем давление в падающей. При этом коэффициент отражения больше единицы. Вообще говоря, в качестве зеркальной кривой нужно строить ударную кривую



вторичного сжатия. В момент отражения среда с пузырьками сжата в волне. Отражённая волна сжимает среду с другой, меньшей, концентрацией пузырьков, а давление в пузырьках больше атмосферного.

Для примера на рис.16 построена одна зеркально-симметричная кривая вторичного сжатия из точки с давлением в падающей волне $\Delta p = 10$ бар. Концентрация газа уменьшилась в 28 раз. Объём пузырьков стал меньше, и они стали жёстче. При таких условиях ударная кривая вторичного сжатия мало отличается от прямой для чистой воды.

Видно, что давление в отражённой волне почти в три раза больше, чем давление в падающей. На рис. 17 показаны результаты экспериментов по отражению УВ в

глицерине с концентрацией пузырьков воздуха $\beta = 0.5\%$ от латунной стенки. Коэффициент отражения R сильно зависит от амплитуды давления в падающей волне. Крестиками показаны экспериментальные данные, полученные при последовательном увеличении давления в волне, кружками – при уменьшении. Чёрные точки – расчёт по методике, показанной на рис.16.

Результаты экспериментов и их интерпретация в рамках описанных здесь моделей позволяет разбить нелинейные эффекты в средах с пузырьками газа на две группы:

1. Накапливающиеся эффекты, проистекающие из-за аномально большого значения нелинейного акустического параметра γ . Быстро набегаёт фронт, сильно нелинейное поглощение. Всё это происходит при небольших концентрациях $\beta \sim 10^{-5} - 10^{-3}$.

2. Мгновенные нелинейные эффекты при отражении и прохождении волн через границу раздела. Эти эффекты связаны с аномально малой скоростью звука в средах с пузырьками и возможностью роста скорости распространения почти на два порядка. Эти эффекты сильны при больших концентрациях $\beta \sim 10^{-2} - 10^{-1}$.

Линейные акустические эффекты, связанные с поглощением и дисперсией скорости звука в средах с пузырьками тоже могут быть сильными.

Данная рукопись является конспектом курса лекций для студентов 5 курса кафедры радиофизики, специализирующихся по нелинейной акустике. К конспекту нужен ещё и преподаватель, который прочитает эти лекции.

Автор будет премного благодарен за советы, за найденные ошибки и опечатки.

Дружинин Г.А.

28 ноября 1998 года, СПб.

Исправлено и дополнено 30 ноября 2009 года.

e-mail: gd1969@ya.ru

<http://www.phys.spbu.ru/department/RadioPhysics/russian/nonlinacoust.html>

<http://www.phys.spbu.ru/department/RadioPhysics/english/druzhinin.html>

СПРАВОЧНЫЙ ЛИСТ

$$x_p = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon M_0} = \frac{C_0^2}{\varepsilon\omega v_0} = \frac{C_0}{\varepsilon\omega M_0} .$$

Расстояние образования разрыва.

$$\frac{v_p}{v_0} = \frac{\pi}{1+\sigma} ; \quad \sigma = \frac{x}{x_p} .$$

Амплитуда пины.

$$v' = \frac{\varepsilon}{C_0^2} v\ddot{v} + \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v} .$$

Уравнение Бюргерса.

$$Re = \frac{\Delta p_{\max}}{b\omega} = \frac{\rho_0 C_0 v_0}{b\omega} = \frac{\rho_0 \lambda v_0}{2\pi b} .$$

Акустическое число Рейнольдса.

$$\frac{b\omega}{2\varepsilon\rho_0 C_0 v_0} = \frac{1}{2\varepsilon Re} = \Gamma .$$

Отношение диссипативного члена к нелинейному.

$$\alpha = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 C_0^3} .$$

Коэффициент поглощения.

$$\tau_{fr} = \frac{4\Gamma_p}{\omega} = \frac{2b}{\varepsilon\rho_0 C_0 v_p} .$$

Длительность фронта.

$$\alpha_s = \frac{\varepsilon\omega v_p}{\pi C_0^2} .$$

Коэффициент поглощения пины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.
2. Исакович М.А. Общая акустика. М., 1973.
3. Остроумов Г.А. Основы нелинейной акустики. Л., 1967.
4. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М., 1966.
5. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., 1990.
7. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л., 1981.
8. Акуличев В.А. Пульсации кавитационных полостей. В кн. – «Мощные ультразвуковые поля». Ред. Розенберг Л.Д. М., 1968. с. 129 – 167.
9. Накоряков В.Е., Покусаев В.Е., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск. 1983.
10. Neppiras E.A., Noltingk B.E. Cavitation produced by ultrasonics. – Proc. Phys. Soc. London, Sec. B, 1951, v. 64, p. 2, No. 384B, p. 1032 – 1038.
11. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.
12. Альтшулер Л.В. Применение ударных волн в физике высоких давлений. УФН, 1965, т. 85, № 2, с. 197 – 258.
Альтшулер Л.В. и др. Развитие в России динамических методов исследования высоких давлений. УФН, 1999, т. 169, № 3, с. 323 – 344.
13. Мак-Куин Р.Г., Марш С.П., Тейлор Дж.В., Фритц Дж.Н., Картер У. Уравнение состояния твёрдых тел по результатам исследования ударных волн. В кн. – «Высокоскоростные ударные явления». М., 1973, с. 299 – 427.
14. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М., 1980.
15. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1969.
16. Ляхов Г.М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., 1974.
17. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М., 1982.
18. Ostroumov G.A., Druzhinin G.A., Kriachko V.M., Tokman A.S. Acoustic waves propagation and nonlinear phenomena in porous media. VI International Symposium on Nonlinear Acoustics. М., 1978, p. 209 – 219.
19. Дружинин Г.А., Михайлов А.А., Токман А.С. Экспериментальное определение концентрации свободного и растворённого газа в жидкости. Акустический журнал, 1988, т.34. №1, с. 176 – 178.
20. Владимиров Ю.М., Дружинин Г.А., Михайлов А.А., Токман А.С. Самоусиление параметрического взаимодействия акустических волн в воде с растворённым газом. Вестник ЛГУ. 1984. №10. Вып. 2, с. 113 – 114.
21. Дружинин Г.А. Волны в средах с пузырьками. «Акустика на пороге XXI века». Сб. трудов VI сессии российского акустического общества. М. Изд. Московского государственного горного университета. 1997, с.7 – 12.
22. Дружинин Г.А. Нелинейная акустика. Конспект лекций. 1998 – 2010.
<http://www.phys.spbu.ru/Departments/RadioPhysics/russian/nonlinacoust.html>
23. Дружинин Г.А. Влияние теплопередачи на нагрев стенки пульсирующего пузырька и на переход периодических пульсаций в хаотические. Акустический журнал. 2008, т.54, №5, с. 740–743.