

Глава 2

Ультразвук

§ 1. РОЛЬ ДИССИПАЦИИ – ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ.

В первой главе мы рассмотрели распространение нелинейной волны в бездиссипативной среде. Отсутствие диссипации сильно упростило вычисления, но привело к тому, что в решении появлялась многозначность. Пришлось вводить разрыв, чтобы её избежать. Для того чтобы учесть поглощение напишем уравнение Навье – Стокса для плоской волны:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (1)$$

$\Delta \bar{v} = \text{grad div } \bar{v} - \text{rot rot } \bar{v}$ и $\text{rot } \bar{v}$ всегда будет равен нулю из-за отсутствия сдвиговых волн. Поэтому в (1) осталась только вторая производная по x .

Будем пока рассматривать линейный случай, то есть $v \rightarrow 0$ или $M \rightarrow 0$. Тогда в (1) можно пренебречь нелинейным членом $v(\partial v/\partial x)$. Например, если $v = v_0 \sin(\omega t - kx)$, то

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\max} = v_0 \omega ; \quad \left| v \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\max} = v_0^2 k = \omega v_0 \left(\frac{v_0}{C_0} \right) = \omega v_0 M_0. \quad \text{Это мы уже один раз делали}$$

в первой главе. Кроме того $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \rightarrow C_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ при $M \rightarrow 0$.

Теперь продифференцируем (1) по t , разделив его предварительно на $\rho_0 C_0^2$:

$$\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{b}{\rho_0 C_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь $b = \zeta + \frac{4}{3} \eta + \kappa \left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right)$. Последний член возникает только при учёте теплопроводности (Исакович).

Здесь κ – коэффициент теплопроводности.

Уравнение неразрывности:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

В линейном случае оно упростится до

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продифференцируем его по x :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Вычтем (4) из (2):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho_0 C_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \text{или} \quad v'' - \frac{1}{C_0^2} \ddot{v} + \frac{b}{\rho_0 C_0^2} \dot{v}'' = 0. \quad (5)$$

Если бы не третий член, то это было бы волновое уравнение. Оно получается из (5) при $b = 0$, то есть для бездиссипативной модели.

Ищем решение в виде синусоидальной волны: $v = v_m \exp(-i\omega t)$.

а) Конечно, мы будем интересоваться вещественной функцией $i(v - v^*)/2 = v_m \sin(\omega t)$.

Здесь v^* – комплексно сопряжённая величина. Полезно помнить, что комплексное число можно записать в виде $a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho \exp(i\varphi)$.

б) Конечно, так можно делать только в линейных уравнениях.

Подставив эту экспоненту в (5), получим так называемое уравнение Гельмгольца, Кёнигсбергского профессора.

$$v_m''(x) \left(1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2} \right) + \frac{\omega^2}{C_0^2} v_m(x) = 0, \quad \text{или} \quad v_m''(x) + \frac{k_0^2}{\left(1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2} \right)} v_m(x) = 0.$$

Здесь $k_0 = (\omega/C_0)$.

Решение этого уравнения будет: $v_m(x) = v_1 \exp(ikx) + v_2 \exp(-ikx)$, где

$$k = k_0 \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 C_0^2} \right)}} \approx k_0 \left(1 + i \frac{b\omega}{2\rho_0 C_0^2} \right), \quad \text{если} \quad \frac{b\omega}{\rho_0 C_0^2} \ll 1.$$

Отсюда коэффициент поглощения $\alpha = \frac{\omega}{C_0} \frac{b\omega}{2\rho_0 C_0^2} = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 C_0^3}$, $\alpha \sim \omega^2$. (6)

Убывание амплитуды – экспоненциальное, так как $v_m \sim \exp(ik_0 x) \exp(-\alpha x)$.

Каков смысл нашего требования, чтобы $(b\omega/\rho_0 C_0^2) \ll 1$?

Вычислим расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в e раз:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2\rho_0 C_0^2}{b\omega} \frac{C_0}{\omega} = x_a; \quad \frac{x_a}{\lambda} = \frac{2\rho_0 C_0^2}{b\omega} \frac{\lambda}{2\pi \lambda} = \frac{\rho_0 C_0^2}{b\omega} \gg 1.$$

Оказалось, что в таком приближении характерная длина поглощения много больше длины волны. На длине волны поглощение мало, амплитуда меняется медленно. Заметим, что в воздухе на частоте 1 кГц $1/\alpha \approx 3$ км.

Это была подготовка к выводу модельного уравнения для описания эволюции профиля волны при условиях слабой нелинейности, когда $(\epsilon M) \ll 1$ и слабого поглощения, когда $(b\omega/\rho_0 C_0^2) \ll 1$.

§ 2. УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА.

Любое движение жидкости или газа, в том числе и наша волна, будет описываться уравнением движения – Навье-Стокса (8), уравнением неразрывности (9) и уравнением состояния (10). Напишем их для одномерной плоской волны:

$$(\rho_0 + \Delta\rho) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\Delta\rho + \rho_0) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (10)$$

Зададимся целью исключить p и ρ из этих уравнений. Как Вы уже могли заметить, важно избавиться от $\partial p / \partial x$. Ранее мы заменяли эту производную на $\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, а вместо $\partial p / \partial \rho$ писали для волн с бесконечно малой амплитудой, то есть для линейных волн – C_0^2 . Теперь мы интересуемся распространением волн малой, но конечной амплитуды, то есть считаем $\gamma M \gg 1$. Для вычисления $\partial p / \partial \rho$ учтём только наклон и кривизну $p(\rho)$ вблизи начальной точки.

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = C_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = C_0^2 \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \approx C_0^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)\Delta \rho}{\rho_0} \right). \quad (12)$$

Подставим (12) в уравнение Навье-Стокса (8):

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \Delta \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + C_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + C_0^2 \frac{\gamma-1}{\rho_0} \Delta \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Член $\Delta \rho v (\partial v / \partial x)$ выбросим из-за особой малости.

Чтобы получить уравнение для $\frac{\partial v}{\partial x}$ разделим (13) на $\rho_0 C_0$, а уравнение неразрывности (9) на ρ_0 и сложим их. Вычитать нельзя, иначе в дальнейшем большие члены не уничтожатся.

$$\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + M + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{C_0}{\rho_0} \left(1 + (\gamma-1) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} + M \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{b}{\rho_0 C_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Теперь вспомним, что в линейной акустике $M = v/C_0 = \Delta \rho / \rho_0$ и напишем с точностью до малых второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = M, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial x}. \\ \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial t} (1+M) + \frac{\partial v}{\partial x} (1+2M) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{C_0}{\rho_0} (1+(\gamma-1)M+M) + \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{b}{\rho_0 C_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial t} (2+M) + \frac{\partial v}{\partial x} (2+2M+\gamma M) = \frac{b}{\rho_0 C_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь снова перейдём в сопровождающую систему отсчёта. У нас волна меняет форму, эволюционирует, из-за проявления нелинейности и диссипации. Будем считать, что это происходит медленно, то есть $\varepsilon M \ll 1$, $(b\omega/\rho_0 C_0^2) \ll 1$. Такая ситуация может быть реализована в экспериментальных исследованиях. Вспомним, что в бездиссипативной модели Римана нам удалось выделить эту медленную зависимость:

$$\frac{v}{v_0} = \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{C_0} \right) + \frac{\omega}{C_0} (\varepsilon M) x \right]. \quad (16)$$

Для линейных волн в среде со слабой диссипацией нам тоже удалось выделить эту зависимость в виде экспоненциального множителя. Кроме того, оказалось, что малость диссипации означает малое изменение амплитуды на длине волны. А условие малой нелинейности $\varepsilon M \ll 1$ означает малое изменение формы на длине волны. Действительно, если положить в (16) $x = \lambda$, то второй член (нелинейная добавка к аргументу в квадратных скобках) будет: $(2\pi v/C_0)(\varepsilon M)\lambda = 2\pi(\varepsilon M) \ll 2\pi$. Здесь использовано $C_0 = \lambda v$. Оказалось, что на длине волны нелинейная добавка к аргументу синуса много меньше 2π , а, следовательно, искажения формы синуса малы.

Будем считать, что медленную зависимость от координаты можно будет выделить и при совместном действии нелинейности и диссипации. Введём новую «медленную» переменную $\xi = \mu x$, $\mu \ll 1$ и «быструю» $\tau = (t - x/C_0)$. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{C_0} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Вычислим правую часть в (15):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{2\mu}{C_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}.$$

Первые два члена малы по сравнению с третьим, так как перед ними стоит $\mu \ll 1$. Выбросим их без жалости, тем более, что сам этот последний оставшийся член

$$\frac{b}{\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \sim \frac{b \omega^2}{\rho_0 C_0^3} \quad \text{много меньше первого члена в (14)} \quad \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial \tau} \sim \frac{\omega}{C_0}, \quad \text{при условии}$$

$$\frac{b \omega}{\rho_0 C_0^2} \ll 1.$$

Заменим производные в (15):

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial \tau} (2 + M) + \mu \frac{\partial v}{\partial \xi} (2 + 2M + \gamma M) - \frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial \tau} (2 + 2M + \gamma M) = \frac{b}{\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}.$$

Теперь выбросим слагаемые второго порядка малости, в которых малое μ

$$\text{умножается на малое } M: \quad -\frac{1}{C_0} \frac{\partial v}{\partial \tau} (M + \gamma M) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{b}{\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}.$$

Исчезли самые большие члены!

Заменим обратно: $2\mu \frac{\partial v}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial v}{\partial x}$. Получим в итоге:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{C_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}.$$

$$\text{Или: } v' = \frac{\varepsilon}{C_0^2} v \dot{v} + \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v}. \quad (17)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение называется уравнением Бюргера.

§ 3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ РОЛЬ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДИССИПАЦИИ.

Если $\varepsilon M \rightarrow 0$ (это и есть линейная акустика) можно пренебречь нелинейным членом.

Тогда:

$$v' = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v}.$$

Возьмём волну первоначально синусоидальной формы. $v \sim \sin(\dots)$, $(\partial^2 v / \partial \tau^2) \sim -\sin(\dots)$. Понятно, что если скорость изменения по координате (v') пропорциональна самой функции, то решение уравнения – убывающая синусоида.

Заметим, что в уравнение Навье-Стокса вязкость и гидродинамическая нелинейность входят в виде слагаемых. Поэтому, они вошли в виде слагаемых и в модельное эволюционное уравнение Бюргера.

Нелинейный член в уравнении Бюргера делает передний фронт волны круче. Это мы видели, когда анализировали уравнение Бюргера при $b = 0$, $v' = (\varepsilon / C_0^2) v \dot{v}$. На крутом фронте вторая производная растёт, диссипативный член в (17) становится больше и больше. Это приводит к уменьшению амплитуды именно в этом месте, то есть в конце концов к сглаживанию фронта.

Если говорить на спектральном языке – нелинейность прибавляет энергию высокочастотных гармоник, а диссипация, пропорциональная ω^2 , интенсивно уменьшает энергию этих гармоник.

Для оценки относительной роли нелинейности и диссипации при распространении волны разделим диссипативный член на нелинейный. Считаем волну по-прежнему синусоидальной: $v = v_0 \sin \omega t$.

$$\frac{\text{диссипация}}{\text{нелинейность}} = \frac{\frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v}}{\frac{\varepsilon}{C_0^2} v \dot{v}} \sim \frac{\frac{b}{2\rho_0 C_0^3} v_0 \omega^2}{\frac{\varepsilon}{C_0^2} v_0^2 \omega} = \frac{b\omega}{2\varepsilon\rho_0 C_0 v_0} = \frac{1}{2\varepsilon \text{Re}} = \Gamma.$$

Здесь акустическое число Рейнольдса: $\text{Re} = \frac{\Delta p_{\max}}{b\omega} = \frac{\rho_0 C_0 v}{b\omega}$.

Ясно, что можно не решая уравнения Бюргера проанализировать относительную роль диссипации и нелинейности в эволюции профиля волны.

Если число $\Gamma \ll 1$, то диссипация слаба и преобладают нелинейные эффекты. Можно пользоваться решением Римана.

Если число $\Gamma \gg 1$, то всё определяется диссипацией, нелинейные искажения малы и можно пользоваться линейным уравнением (5).

ПРИМЕР:

Рассмотрим акустическую волну в воде. Возьмём $\nu = 1$ МГц, $\Delta p = 10^5$ Па ≈ 1 атм, $\varepsilon = 4$, $(\alpha/\nu^2) = 25 \cdot 10^{-15}$ (с²/м) (Кошкин и Ширкевич). $\alpha_{1 \text{ МГц}} = 0.025$ (1/м), $1/\alpha = 40$ м. Зная α можно из (6) определить $b\omega$ и вычислить $\Gamma = 1/32 \ll 1$. Ясно, что нелинейные эффекты будут многократно сильнее диссипативных и в опыте с такой волной можно ожидать образования пилообразного профиля. Следует обратить внимание на тот факт, что при искажении формы волны в её спектре будут появляться гармоники. Уже для второй гармоники α будет не в два, а в четыре раза больше! Соответственно и число Γ будет больше. Поэтому, гармоники с высокими номерами будут интенсивно поглощаться, и фронт волны не сможет стать разрывным.

§ 4. ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА – ВТОРАЯ ГАРМОНИКА.

В нашем курсе лекций описаны три решения уравнения Бюргера. Все они потребуются для обсуждения физических следствий распространения мощных волн, большей частью ультразвуковых волн. Почему ультразвуковых? Потому, что на низких частотах поглощение невелико, а расстояние образования разрыва может быть очень большим. В экспериментальных ситуациях амплитуды волн на таких расстояниях обычно уже малы. Поэтому, совместное влияние нелинейности и диссипации можно наблюдать, как правило, на довольно высоких частотах.

Вспомним уравнение Бюргера:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \underbrace{\frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}}_{\text{диссипативный член}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{C_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau}}_{\text{нелинейный член}}.$$

Вспомним, что при выводе этого уравнения, искажения формы из-за влияния нелинейности и из-за влияния диссипации считались слабыми, а соотношение между нелинейным и диссипативным членами было произвольным.

Воспользуемся методом последовательных приближений: возьмём волну очень маленькой амплитуды. Тогда уравнение Бюргера можно линеаризовать, пренебrecь нелинейным членом. Решение оставшегося линейного уравнения мы знаем – это

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2}. \quad (18)$$

синусоидальная волна с медленно убывающей амплитудой $v_1 = v_0 \exp(-\alpha x) \cdot \sin(\omega \tau)$. Это можно проверить подстановкой. Здесь мы пишем синус из-за нелинейности основного уравнения. Будем увеличивать амплитуду волны до тех пор, пока форма волны не станет чуть-чуть отличаться от синусоидальной. Это отличие – малая добавка v_2 . Нашу волну мы можем записать в виде суммы этих решений $v = v_1 + v_2$ и подставить в уравнение Бюргера. Получим:

$$v_1' + v_2' = \frac{\alpha}{\omega^2} \ddot{v}_1 + \frac{\alpha}{\omega^2} \ddot{v}_2 + \frac{\varepsilon}{C_0^2} (v_1 \dot{v}_1 + v_2 \dot{v}_2 + v_1 \dot{v}_2 + v_2 \dot{v}_1) \quad (19)$$

Первые члены справа и слева уничтожаются в силу (18). В скобках три последних члена много меньше первого и мы ими пренебрегаем, так как мы считаем $(v_2/v_1) \ll 1$. Получаем для v_2 линейное дифференциальное уравнение с внешним источником, которым является нелинейное искажение профиля исходной волны.

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} + \frac{\varepsilon}{C_0^2} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau}. \quad (19 \text{ a})$$

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = v_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega \tau) v_0 e^{-\alpha x} \omega \cos(\omega \tau) =$$

$$= v_0^2 e^{-2\alpha x} \omega \sin(\omega \tau) \cos(\omega \tau) = \frac{\omega v_0^2}{2} e^{-2\alpha x} \sin(2\omega \tau).$$

Ищем решение в виде $v_2 = A(x) \sin(2\omega \tau)$. Это – вторая гармоника линейной волны v_1 , а выброшенные в (19) члены суть третья и четвёртая гармоники. Подставив это решение, получим линейное дифференциальное уравнение для амплитуды $A(x)$:

$$A' + 4\alpha A = \frac{\varepsilon \omega v_0^2}{2C_0^2} e^{-2\alpha x}. \quad (20)$$

При $x = 0$, $A = 0$. Это означает, что в начальной точке волна имеет синусоидальную форму, и второй гармоники совсем нет.

Известно (Бронштейн и Семендяев), что если $y' + P(x)y = Q(x)$, то

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + C \right).$$

Обозначим $\frac{\varepsilon \omega v_0^2}{2C_0^2} = L$, тогда $A' + 4\alpha A = L e^{-2\alpha x}$. Так как

$$\int e^{2\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha x}, \text{ то } A(x) = e^{-4\alpha x} \left(L \int e^{-2\alpha x} e^{4\alpha x} dx + C \right) =$$

$$= e^{-4\alpha x} \left(L \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha x} + C \right). \quad A(0) = 0, \quad \frac{L}{2\alpha} = -C.$$

$$A = \frac{L}{2\alpha} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}) = \left(\frac{\varepsilon \omega v_0^2}{2C_0^2} \right) \frac{2\rho_0 C_0^3}{2b\omega^2} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}) =$$

$$= \frac{\varepsilon v_0^2 \rho_0 C_0}{2b\omega} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}) = \frac{v_0}{4\Gamma} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}).$$

Получилось, что амплитуда второй гармоники пропорциональна квадрату амплитуды исходной волны! Это характерный для нелинейных волн результат. При убывании амплитуды этот квадратичный эффект быстро уменьшается и, в конце концов, становится неразличимым в эксперименте. Окончательно:

$$v_2 = \frac{\varepsilon v_0^2 \rho_0 C_0}{2b\omega} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}) \sin 2\omega t.$$

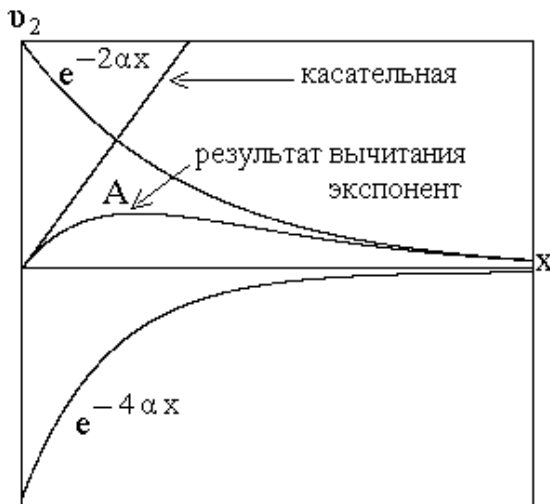


Рис. 1.

Для малых αx экспоненты в скобках можно разложить в ряд $\exp(-\alpha x) = 1 - \alpha x + (\alpha^2 x^2 / 2) - \dots$ и оставить только линейные члены.

$$\frac{A}{v_0} = \frac{1}{4\Gamma} (1 - 2\alpha x - 1 + 4\alpha x + \dots) = \frac{2\alpha x}{4\Gamma} = \frac{b\omega^2 2\varepsilon \rho_0 C_0 v_0 x}{2\rho_0 C_0^3 2b\omega} = \frac{\varepsilon \omega v_0}{2C_0^2} x.$$

$$A = \frac{\varepsilon \omega v_0^2}{2C_0^2} x = v_0 \frac{\sigma}{2}. \quad (21)$$

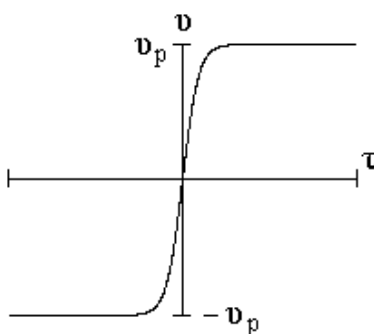
Из формулы, полученной для синусоидальной волны с небольшим искажением, которым оказалась вторая гармоника, можно сделать важные выводы:

- а. Амплитуда второй гармоники на небольших расстояниях от излучателя линейно растёт с ростом x . На рис. 1 проведена касательная к $v_2(x)$, которая демонстрирует эту линейную зависимость.
- б. Амплитуда не зависит от диссипативного коэффициента b . Это значит, что на небольших расстояниях ($\alpha x \ll 1$) нелинейные эффекты преобладают и не зависят от диссипации
- в. Амплитуда зависит от v_0 квадратично, то есть при уменьшении амплитуды волны этот эффект быстро исчезает.
- г. Амплитуда пропорциональна нелинейному параметру.
- д. При больших αx амплитуда второй гармоники убывает как $\exp(-2\alpha x)$, а не как $\exp(-2^2\alpha x)$. Это происходит из-за перекачки энергии из первой гармоники во вторую.

§ 5. ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ – СТАЦИОНАРНОЕ.

Если волна имеет большую амплитуду, то решение более интересное. Здесь $\Gamma \ll 1$ и пользоваться методом возмущений нельзя, так как за нулевое приближение нельзя взять линейное решение. Для небольших расстояний σ решение нам известно, это $v = v_0 \sin(\omega t + \sigma(v/v_0))$. Когда образуется разрыв, а затем волна превращается в пилообразную с разрывным фронтом, уравнение Бюргера перестаёт работать. Можно попробовать сшить задний склон пики с плавным фронтом, получаемым из стационарного решения уравнения Бюргера. Если волна стационарная, то есть её профиль не меняется при распространении, то $\partial v / \partial x = 0$. Это может быть в том случае, когда увеличение крутизны фронта волны из-за нелинейности компенсируется размыванием этого фронта из-за диссипации. Тогда уравнение Бюргера упрощается:

$$\frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v} + \frac{\varepsilon}{C_0^2} v \dot{v} = 0, \quad \text{или} \quad a \ddot{v} + v \dot{v} = 0, \quad \text{здесь} \quad a = \frac{b}{2\varepsilon \rho_0 C_0}. \quad (22)$$



Будем искать стационарное решение в виде симметричной ступеньки с плавным фронтом (рис. 2). Симметричность сделает её неподвижной в координатах $v - \tau$, так как точка с нулевой массовой скоростью бежит со скоростью C_0 , а $\tau = t - x/C_0$.

Рис. 2.

Знакопеременная волна любой формы на расстояниях больше расстояния образования разрыва непременно становится пилообразной волной. Амплитуда её быстро убывает и она, конечно, не может быть стационарной.

Судьба однополярного импульса сжатия нам тоже известна. Его амплитуда быстро убывает. Импульс разрежения вообще при нормальных условиях не может иметь укручающегося фронта.

Ступенька подходит по всем параметрам. Амплитуда её не может убывать, так как ступенька имеет бесконечную протяжённость в обе стороны. $v(+\infty) = v_p$; $v(-\infty) = -v_p$.

Сведём уравнение (22) к уравнению первого порядка заменой $\partial v / \partial \tau = y$.

$$\ddot{v} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau} = y \frac{\partial y}{\partial v}.$$

$$ay \frac{\partial y}{\partial v} + vy = 0, \quad \int a dy = -\int v dv. \quad ay = -\frac{v^2}{2} + \text{const}, \quad 2ay = -v^2 + C_1.$$

$$\text{При } \tau \rightarrow +\infty \quad y = \dot{v} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow v_p. \quad C_1 = v_p^2.$$

При $\tau \rightarrow -\infty \quad y = \dot{v} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow -v_p. \quad C_1 = (-v_p)^2$. Это ещё одно достоинство выбранной нами симметричной ступеньки.

$$2ay = v_p^2 - v^2; \quad 2a \frac{\partial v}{\partial \tau} = v_p^2 - v^2; \quad \frac{1}{2a} \int d\tau = \int \frac{dv}{v_p^2 - v^2}.$$

Из справочника Двайта: $\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \text{arth} \frac{bx}{a}$, при $a^2 > b^2 x^2$. Отсюда:

$$\frac{\tau}{2a} = \frac{1}{v_p} \text{arth} \frac{v}{v_p}, \quad \frac{v_p \tau}{2a} = \text{arth} \frac{v}{v_p}.$$

$$\text{Окончательно: } \frac{v}{v_p} = \text{th} \frac{v_p \tau}{2a} = \text{th} \frac{v_p \tau 2\varepsilon \rho_0 C_0}{2b} = \text{th} \left(\frac{\omega \tau}{2\Gamma_p} \right), \quad \text{где } \Gamma_p = \frac{b\omega}{2\varepsilon \rho_0 C_0 v_p}.$$

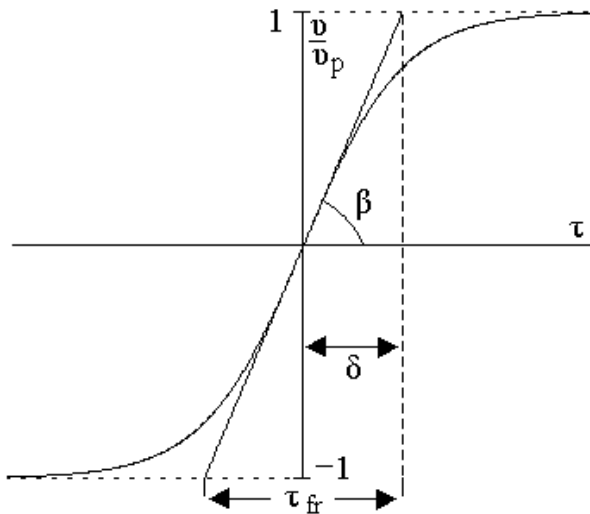


Рис. 3.

Здесь τ_{fr} – ширина фронта,
 $\delta = \tau_{\text{fr}}/2$ – полуширина фронта.

Попробуем вычислить ширину фронта τ_{fr} , которую мы определим как промежуток времени между точками пересечения касательной к фронту с

асимптотами гиперболического тангенса (см. рис. 3).

$$\tau_{\text{fr}} = 2 \frac{1}{\text{tg } \beta} = \frac{2}{\frac{\partial (v/v_p)}{\partial \tau}} \bigg|_{\tau=0} = \frac{2 \text{ch}^2 \left(\frac{\omega \tau}{2\Gamma_p} \right) \big|_0}{\omega}.$$

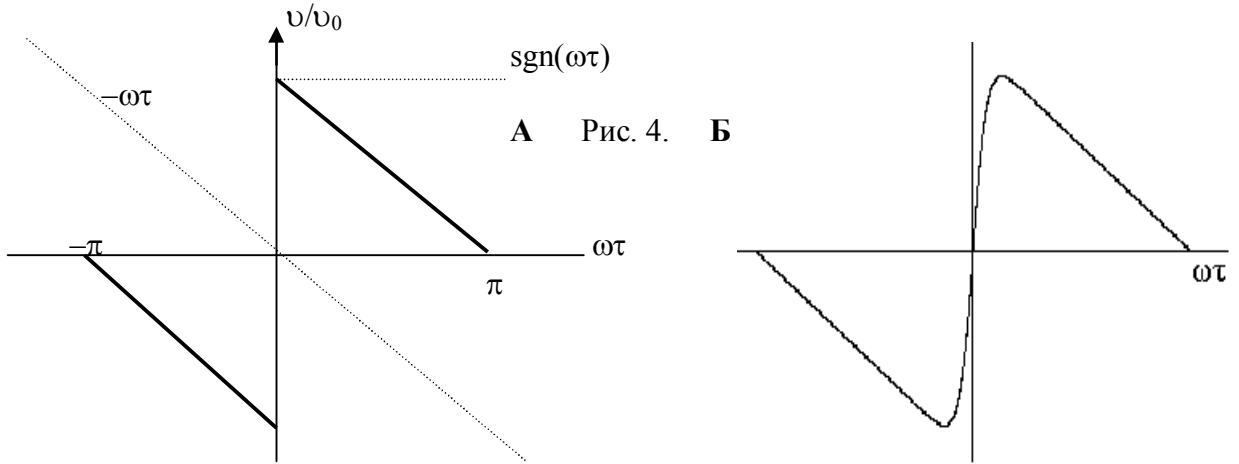
$$\tau_{\text{fr}} = \frac{4\Gamma_p}{\omega} = \frac{4}{\omega} \frac{b\omega}{2\varepsilon \rho_0 C_0 v_p}; \quad \delta = \frac{2\Gamma_p}{\omega}. \quad \text{Тогда } \frac{v}{v_p} = \text{th} \left(\frac{\tau}{\delta} \right).$$

Так как Γ_p содержит ω , то в формуле для τ_{fr} и δ частоты нет! Если измерить τ_{fr} стационарной волны, то из формулы можно определить диссипативный параметр b . Обратите внимание на то, что τ_{fr} размерное, а tg должен быть безразмерным.

§ 6. ТРЕТЬЕ РЕШЕНИЕ – ПИЛА С ПЛАВНЫМ ФРОНТОМ.

Можно записать уравнение для одного периода пилообразной волны в виде суммы линейной функции и симметричной ступеньки:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1+\sigma}(-\omega\tau + \pi \operatorname{sgn}(\omega\tau)), \quad v|_0 = v_p, \quad v|_{\pm\pi} = 0.$$



Эта функция (рис. 4, А) нехороша тем, что разрывная функция $\operatorname{sgn}(\omega\tau)$, (что означает просто "знак $\omega\tau$ "), не может быть решением дифференциального уравнения. Попробуем заменить эту разрывную ступеньку плавным гиперболическим тангенсом. При достаточно малой ширине фронта график гиперболического тангенса может быть очень похож на ступеньку. Кроме того он является решением уравнения Бюргерса. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_0} &= \frac{1}{1+\sigma} \left(-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \left(\frac{\tau}{\delta_s} \right) \right); \quad \text{здесь} \quad \delta_s = \delta_s(x) = \frac{2b}{2\varepsilon\rho_0 C_0 v_p} = \\ &= \frac{2b}{2\varepsilon\rho_0 C_0} \frac{1+\sigma}{v_0 \pi} = \frac{2(1+\sigma)\Gamma_0}{\pi\omega}. \end{aligned} \quad \text{График этой функции при ведён на рис. 4, Б.}$$

Можно проверить, что эта функция является решением уравнения Бюргерса. Автор этого решения – Рэм Викторович Хохлов. Решение хорошо только при $\tau_{\text{fr}} \ll T$, где T – период волны. Если это условие не выполняется, то будет сказываться наличие небольшого скачка при $\omega\tau = \pi$. Что означает это условие?

$\tau_{\text{fr}} \ll T$, $\tau_{\text{fr}} \ll \frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{4\Gamma_p}{\omega} \ll \frac{2\pi}{\omega}$, $\Gamma_p \ll \frac{\pi}{2}$. Это значит, что диссипативный член уравнения Бюргерса много меньше нелинейного и нелинейные эффекты преобладают.

Разложим в ряд Фурье эту "пилу" со сглаженным фронтом (рис.4, Б).

$$B_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\sigma} \int_0^\pi \left[-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \left(\frac{\omega\tau}{\omega\delta_s} \right) \right] \sin n\omega\tau \, d(\omega\tau). \quad \text{Обозначим} \quad \omega\tau = \theta, \quad \frac{1}{\omega\delta_s} = \beta.$$

$$B_n = \frac{2}{\pi(1+\sigma)} \int_0^\pi [-\theta + \pi \operatorname{th}(\beta\theta)] \sin n\theta \, d\theta.$$

Попробуем вычислить этот интеграл, продифференцировав его по параметру β :

$$\frac{\partial B_n}{\partial \beta} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{1+\sigma} \int_0^\pi \frac{\theta \sin n\theta \, d\theta}{\operatorname{ch}^2(\beta\theta)} \approx \frac{2\pi}{\pi(1+\sigma)} \int_0^\infty \dots$$

Подынтегральная функция быстро убывает и очень мала при $\theta > \pi$. Поэтому можно заменить верхний предел интегрирования на бесконечный. Получившийся интеграл есть в справочнике Рыжика и Градштейна.

$$\frac{\partial B_n}{\partial \beta} = \frac{\pi}{1+\sigma} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2\beta}} \right). \quad \text{Отсюда:}$$

$$B_n = \frac{\pi}{1+\sigma} \frac{1}{\beta \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2\beta}} = \frac{\pi}{1+\sigma} \frac{2(1+\sigma)\Gamma_0}{\pi\omega} \frac{\omega}{\operatorname{sh} \frac{2\pi n(1+\sigma)\Gamma_0}{2\pi}} = \frac{2\Gamma_0}{\operatorname{sh}[n\Gamma_0(1+\sigma)]}. \quad \text{Наконец:}$$

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Gamma_0}{\operatorname{sh}[n\Gamma_0(1+\sigma)]} \sin(n\omega\tau). \quad (23)$$

Это – решение, полученное в 1931 году англичанином Фэем (Fay) совершенно иным образом. Какие можно сделать выводы, глядя на этот ряд?

А. При больших σ ($\Gamma\sigma \gg 1$) $e^{-x} \rightarrow 0$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{1}{2}e^x$ и амплитуды гармоник убывают пропорционально $e^{-n\Gamma\sigma} = e^{-n\alpha_1 x}$, а не пропорционально $e^{-n^2\Gamma\sigma}$, как этого требует теория линейных волн. Коэффициент поглощения пропорционален частоте, а не квадрату частоты. Это происходит из-за "подкачки" энергии из низших гармоник к высшим. Кстати, $\Gamma\sigma = \alpha_1 x$, причём $\alpha_1 = \alpha_1(\omega_1^2)$, где ω_1 – частота первой гармоники.

Б. При $\Gamma \rightarrow 0$ (диссипация мала) решение переходит в ряд для пилы. Так как $\operatorname{sh} x \approx x$, то $B_n \sim 1/n$.

В. На очень больших расстояниях (от того места, где волна начала свою эволюцию с синусоидальной волны) $\sigma \gg 1$, $(\sigma + 1) \rightarrow \sigma$. Если потребовать, чтобы выполнялось ещё и $\Gamma\sigma \gg 1$, то отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой будет:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\operatorname{sh} \Gamma_0(1+\sigma)}{\operatorname{sh} 2\Gamma_0(1+\sigma)} \approx \frac{e^{\Gamma_0\sigma}}{e^{2\Gamma_0\sigma}} = e^{-\Gamma_0\sigma} \ll 1.$$

Главным будет первый член ряда, амплитуда даже второй гармоники будет много меньше первой и волна будет почти синусоидальной. Из (23) амплитуда волны будет:

$$\frac{v}{v_0} \approx \frac{2\Gamma_0 2 \sin(\omega\tau)}{e^{\Gamma_0\sigma}} = 4\Gamma_0 e^{-\Gamma_0\sigma} \sin(\omega\tau). \quad \text{Отсюда:} \quad v \approx v_0 4 \frac{b\omega}{2\varepsilon \rho_0 C_0 v_0} e^{-\alpha x} \sin(\omega\tau).$$

Получилось, что опять амплитуда волны не зависит от первоначальной амплитуды. Из этого следует вывод, что нельзя передавать акустическую мощность, больше некоторого предела.

Волна, описываемая уравнением Бюргерса, проходит в своей эволюции три этапа:

1. Нелинейные искажения накапливаются. Фронт становится круче, в спектре возникают гармоники.
2. Форма волны стабилизируется – это пила с плавным фронтом. Её амплитуда быстро убывает.
3. При $\Gamma\sigma \gg 1$ амплитуда волны почти не зависит от своего первоначального значения, волна снова становится гармонической. Кстати, когда $\omega\tau_{\text{ф}}$ станет порядка π , шитое решение станет абсурдом.

§ 7. СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА К УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Вспомним уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{C_0^2} v \dot{v} + \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v}, \quad \Gamma = \frac{b\omega}{2\varepsilon\rho_0 C_0 v_0}. \quad \text{Запишем его в безразмерном виде.}$$

$$\text{Для этого введём безразмерные переменные: } Q = \frac{v}{v_0}, \quad \theta = \omega\tau, \quad z = \frac{\varepsilon\omega v_0 x}{C_0^2} = \sigma.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\varepsilon\omega v_0}{C_0^2} \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_0 \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{v_0 \varepsilon \omega v_0}{C_0^2} \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\varepsilon}{C_0^2} v \dot{v} = \frac{\varepsilon}{C_0^2} Q v_0^2 \omega \frac{\partial Q}{\partial \theta};$$

$$\frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v} = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} v_0 \ddot{Q} = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} v_0 \omega^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon\omega v_0^2}{C_0^2} \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\varepsilon\omega v_0^2}{C_0^2} Q \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{b v_0 \omega^2}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = Q \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{b v_0 \omega^2 C_0^2}{2\rho_0 C_0^3 \varepsilon v_0 v_0 \omega} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} = Q \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}. \quad (24)$$

Введём новую переменную U : $Q = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U = 2\Gamma \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \theta}$. Это – замена Хопфа (Hopf, 1950) – Коула (Cole, 1951)!

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 2\Gamma \left(\frac{-1}{U^2} \right) \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{2\Gamma}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial z};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{2\Gamma}{U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2\Gamma}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2};$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} = \frac{4\Gamma}{U^3} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{2 \cdot 2\Gamma}{U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{2\Gamma}{U^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{2\Gamma}{U} \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3}. \quad \text{Подставляем в (24):}$$

$$\begin{aligned} -\frac{2\Gamma}{U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{2\Gamma}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial z} &= -\frac{4\Gamma^2}{U^3} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^3 + \frac{4\Gamma^2}{U^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{4\Gamma^2}{U^3} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^3 - \frac{4\Gamma^2}{U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{2\Gamma^2}{U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{2\Gamma^2}{U} \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3}. \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{U^2} \dot{U} \right) U' + \left(\frac{1}{U} \right) \dot{U}' = \left(-\frac{\Gamma}{U^2} \dot{U} \right) \ddot{U} + \left(\frac{\Gamma}{U} \right) \ddot{U}; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right);$$

$\frac{\partial U}{\partial z} = \Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$. Это – уравнение теплопроводности, не имеющее никакого отношения к волнам. В уравнении теплопроводности скорость распространения тепла бесконечна.

§ 8. СРАВНЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ПИЛООБРАЗНЫХ И СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН.

В линейной акустике амплитуда плоской волны убывает по экспоненте в том случае, если поглощение слабое.

$A = A_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 C_0^3}$; где α - коэффициент поглощения. Отсюда:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\alpha A_0 e^{-\alpha x}, \quad \alpha = -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (25)$$

Если на каждом маленьком участке произвольную кривую зависимости амплитуды от расстояния считать экспонентой, то можно ввести локальный коэффициент поглощения α и вычислять его по этой формуле. Для плоской пилообразной волны:

$$\frac{v_p}{v_0} = \frac{\pi}{1 + \sigma}. \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_p}{v_0} \right) = -\frac{\pi}{(1 + \sigma)^2 x_p} \quad \text{Воспользовавшись (25), получим:}$$

$$\alpha_s = +\frac{\pi}{(1 + \sigma)^2 x_p} \frac{1 + \sigma}{\pi} = \frac{1}{(1 + \sigma)x_p} = \left(\text{выразим } \sigma \text{ из (26)} \right) = \frac{1}{x_p} \frac{v_0}{\pi} = \frac{\varepsilon \omega v_0}{C_0^2} \frac{v_p}{v_0 \pi}.$$

Отсюда коэффициент поглощения плоской пилообразной волны: $\alpha_s = \frac{\varepsilon \omega v_p}{\pi C_0^2} \cdot \quad (27)$

Итак, α_s зависит от массовой скорости (или от давления) в волне. При $v_p \rightarrow 0$ ($\Delta p \rightarrow 0$) $\alpha_s \rightarrow 0$. То есть, как и говорит здравый смысл, если волны очень слабые, то никакой пыли нет, и поглощение пыли тоже отсутствует.

§ 9. МЕТОД ГРАДУИРОВКИ ДАТЧИКОВ ДАВЛЕНИЯ – МЕТОД РОМАНЕНКО.

Воспользуемся формулой зависимости акустического давления от расстояния для сферически-симметричной пилообразной волны (Солуян):

$$\frac{\Delta p_1 r_1}{\Delta p_0 r_0} = \frac{\pi}{1 + \pi \Delta p_0 r_0 \frac{\omega \varepsilon}{\pi \rho_0 C_0^3} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)}. \quad (28)$$

Здесь Δp_0 – давление в акустической волне в точке на расстоянии r_0 , где волна синусоидальная. Это формула получена при таких же приближениях, что и (26), и на больших расстояниях, где волны становятся почти плоскими, переходит в неё.

Так как поглощение пыли зависит от давления в волне, то можно по поглощению определять давление. Этот абсолютный метод градуировки датчиков давления придумал Е.В.Романенко.

В этом методе нужно измерить электрическое напряжение на датчике давления в двух произвольных точках сферически-симметричной пилообразной волны. Для этих двух точек получим из (28):

$$\frac{\Delta p_2 r_2}{\Delta p_1 r_1} = \frac{1 + B \pi \Delta p_0 r_0 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{1 + B \pi \Delta p_0 r_0 \ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right)}, \quad \text{где} \quad B = \frac{\omega \varepsilon}{\pi \rho_0 C_0^3}.$$

Нужно избавиться от неизвестных нам Δp_0 и r_0 ! Из (28):

$$\pi \Delta p_0 r_0 = \Delta p_1 r_1 + B \pi \Delta p_0 r_0 \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right), \quad \pi \Delta p_0 r_0 = \frac{\Delta p_1 r_1}{1 - B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}. \quad \text{Отсюда:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_2 r_2}{\Delta p_1 r_1} &= \frac{1 + \frac{B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{1 - B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}}{1 + \frac{B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right)}{1 - B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} = \frac{1 - B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{1 - B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + B \Delta p_1 r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}. \quad \text{Отсюда:} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta p_2 r_2}{\Delta p_1 r_1} + B \Delta p_2 r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 1, \quad \Delta p_2 = \frac{1 - \frac{\Delta p_2 r_2}{\Delta p_1 r_1}}{B r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}. \quad \text{Это и есть формула Романенко.}$$

Для того чтобы определить давление Δp_2 неградуированным датчиком, нужно знать только отношения электрических напряжений на датчике в двух точках измерения. Этот метод применим только для достаточно широкополосных датчиков, которые воспроизводят пилу без развала фронта. В экспериментах вначале излучались плоские волны. Быстро образовывалась пила. Затем, в области, где волны уже стали сферическими, проводили измерения.

Теперь вычислим α_{sph} для сферических волн:

$$\alpha_{\text{sph}} = -\frac{1}{\Delta p_1} \frac{\partial p_1}{\partial r}; \quad \Delta p_1 = \frac{\pi \Delta p_0 r_0}{r \left(1 + \pi B \Delta p_0 r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right)}.$$

$$\alpha_{\text{sph}} = \frac{1}{r} + \Delta p_1 B = \frac{1}{r} + \rho_0 C_0 v_p \left(\frac{\varepsilon \omega}{\pi \rho_0 C_0^3} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon \omega v_p}{\pi C_0^2} = \frac{1}{r} + \alpha_s.$$

Здесь использована формула (27). Из формулы видно, что убывание амплитуды волны складывается из сферической расходимости $1/r$ и из поглощения энергии на фронте.

§ 10. ДРУГИЕ МЕТОДЫ КАЛИБРОВКИ.

Следующий способ калибровки датчиков давления – по скорости распространения ударной волны в воздухе. Вспомним формулу (24) из главы 1:

$$D = \frac{v}{1 - \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{C_0}\right)^{1-\gamma}} ; \quad \Delta p = \rho_0 D v .$$

Применяются также методы калибровки датчиков давления:

- а. Калориметрический метод.
- б. Метод статического заряда.
- в. Гидростатический метод.
- г. Метод взаимности.

Наиболее распространённым типом датчика акустического давления является пьезокерамический. Применяются также кварцевые, турмалиновые, полупроводниковые, полимерные и другие датчики.

§ 11. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.

Ультразвуковые измерения производятся в заглушённых бассейнах или аквариумах, то есть таких бассейнах, где звук от стенок не отражается. Если в экспериментах применяются пучки, то их можно уводить в сторону зеркалом. Можно применять фильтры-пластинки, располагая их под различными углами к пучку. Так можно выделить или погасить волну какой-либо определённой частоты. Выделив вторую гармонику можно по её росту с расстоянием определить нелинейный параметр γ .

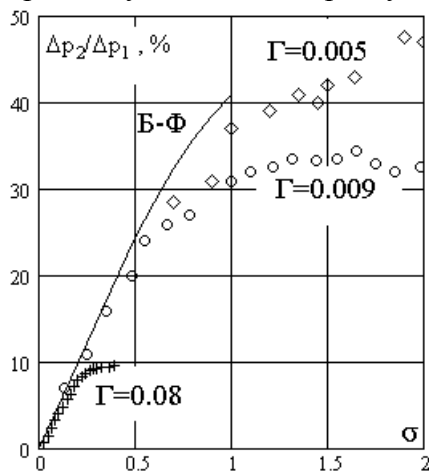


Рис. 5.

На рис. 5 показаны экспериментальные зависимости амплитуды второй гармоники от расстояния в воде (Зарембо и Красильников). Видно, что при разных амплитудах волн, при значениях безразмерного параметра Γ от 0.08 до 0.005, начальный участок хорошо ложится на линейный участок зависимости Бесселя-Фубини (сплошная кривая). На линейном участке экспериментальных зависимостей можно воспользоваться формулой (21) для амплитуды второй

гармоники:

$$A = v_0 \frac{\sigma}{2} = v_0 \frac{\varepsilon \omega v_0}{2C_0^2} x .$$

Массовые скорости можно вычислить из линейно-акустической формулы $\Delta p = \rho_0 C_0 v$.

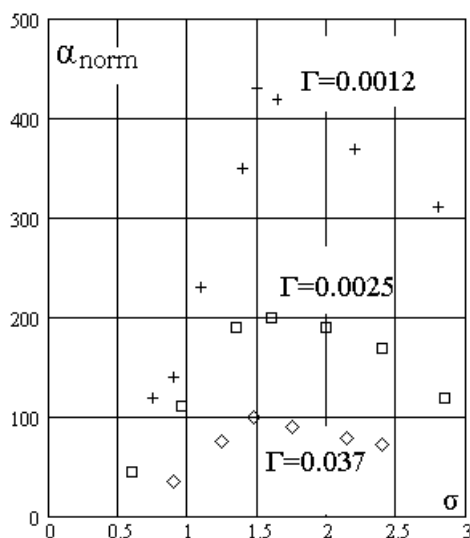


Рис. 6.

Поглощение пилообразных волн гигантское. На рис. 6 показаны экспериментальные результаты разных авторов из книги Л.К. Зарембо и В.А. Красильникова. По оси абсцисс отложен $\alpha_{\text{norm}} = \alpha_{\text{пилы экспер.}} / \alpha_{\text{лин. акуст.}}$ коэффициент поглощения пилообразной волны, нормированный на линейно-акустический коэффициент поглощения. Видно, что чем сильнее волна, тем больше поглощение и для $\Gamma = 0.0012$ коэффициент поглощения пилы более чем в четыреста раз превосходит линейно-акустический коэффициент поглощения.

Интерференционный метод.

Применим только в прозрачных средах и при довольно высоких давлениях. Необходим импульсный источник света, например, импульсный лазер. В тех местах, где среда плотнее будет больше оптический путь и световые волны будут складываться в другой фазе. Фотоаппарат должен быть сфокусировать на объект съёмки. Если давление и плотность меняются монотонно, то фотографии можно расшифровать.

Полутеновой метод (шлирен-метод, метод Теплера).

В этом методе тоже фокусируется на объект съёмки. В фокальной плоскости источника света располагается так называемый нож Фуко или решётка. С ножом все участки с положительным градиентом показателя преломления (конечно по одной координате) будут светлыми, другие участки – тёмными. Можно вместо ножа применять решётку. Тогда изображение будет покрыто изолиниями равного градиента показателя преломления. Можно применять не щель, а круглую диафрагму, а нож делать в виде диска.

Метод Шутилова

Если сфокусировать на плёнку фотоаппарата источник света и пропустить свет сквозь пилообразную волну, то изменения плотности вещества в волне будут работать как призмы (рис. 7). И на негативе свет будет в трёх местах: 1 – это не отклонённый луч (без звука); 2 – луч, отклонённый фронтом пилы, 3 – спадом.

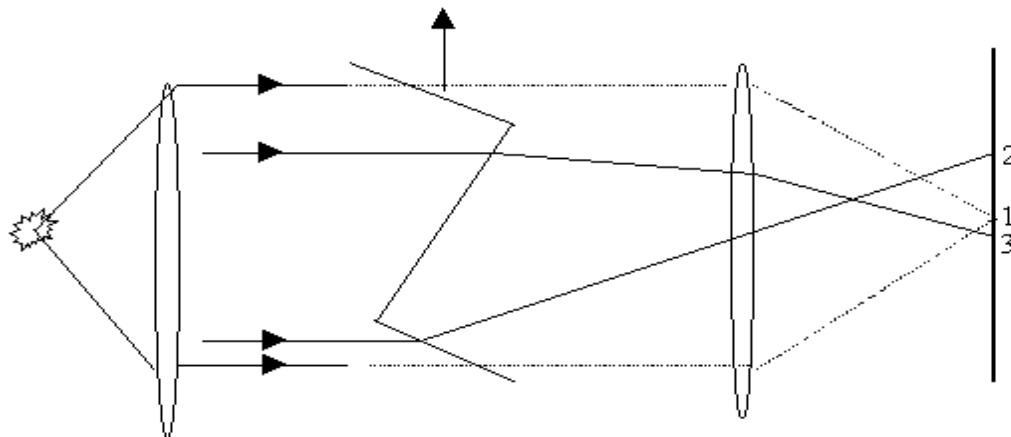


Рис. 7.

В этом методе та же главная проблема – неоднозначность. Профиль волны удаётся восстановить только в случае симметричной относительно невозмущённого состояния

волны.

На негативе картина не будет гладкой. Волна периодическая, она является для света дифракционной решёткой. Поэтому ход интенсивности света на негативе будет не плавный, а будет испещрён максимумами и минимумами.

Лирическое отступление, посвящённое выводу формулы для угла отклонения светового луча в прозрачной среде с градиентом показателя преломления.

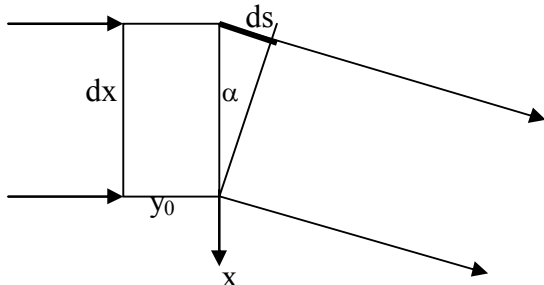


Рис. 8.

Показатель преломления $n = c/v$.
Будем считать угол отклонения малым.

$$\begin{aligned} \alpha \approx \sin \alpha &= \frac{ds}{dx} = \frac{C dt}{dx} = \frac{C(t_0 - t_1)}{dx} = \frac{C \left(\frac{y_0}{v_0} - \frac{y_0}{v_1} \right)}{dx} = \frac{C y_0 \left(\frac{n_0}{C} - \frac{n_1}{C} \right)}{dx} = \\ &= \frac{y_0 (n_0 - n_1)}{dx} . \quad \alpha = y_0 \frac{dn}{dx} . \end{aligned}$$

Высокоскоростная киносъёмка

Применяется, в основном, для регистрации ударных волн. Существует два основных типа кинокамер: с движущейся плёнкой и с неподвижной плёнкой.

Первые устроены иначе, чем традиционные кинокамеры. Плёнка движется непрерывно, а изображение в момент экспозиции проецируется на плёнку и движется вместе с ней при помощи качающейся пластинки или вращающегося зеркала.

В высокоскоростных кинокамерах с неподвижной плёнкой изображение разворачивается при помощи вращающегося зеркала или системы зеркал. В таких камерах скорости съёмки достигают нескольких миллионов кадров в секунду.

§ 12. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ.

В линейной акустике соблюдается принцип суперпозиции, и волны не взаимодействуют между собой. При достаточно больших амплитудах принцип суперпозиции не соблюдается, волны взаимодействуют. Что получается в результате взаимодействия?

Рассмотрим распространение так называемой волны DSB, то есть волны, состоящей при $x = 0$ из двух гармонических волн с близкими частотами:

$$v = v_{01} \cos \omega_1 \tau + v_{02} \cos \omega_2 \tau , \quad \omega_1 - \omega_2 = \Omega , \quad \frac{\Omega}{\omega_1} \ll 1 .$$

Рассмотрим опять случай $\epsilon M \ll 1$ и опять воспользуемся методом последовательных приближений: $v = v_1 + v_2$, $v_2/v_1 \ll 1$, где v_1 – решение линейного уравнения – уравнения Бюргерса без нелинейного члена.

$$v_1 = v_{01} e^{-\alpha_1 x} \cos \omega_1 \tau + v_{02} e^{-\alpha_2 x} \cos \omega_2 \tau ; \quad \alpha_i = \frac{b \omega_i^2}{2 \rho_0 C_0^3} .$$

Уравнение второго приближения для малой нелинейной добавки v_2 уже встречалось

в этой главе – это уравнение (19 а). Кстати, ещё раз обратим внимание на то, что это уравнение – линейное.

$$\dot{v}_2 - \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v}_2 = \frac{\varepsilon}{C_0^2} v_1 \dot{v}_1 . \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{C_0^2} v_1 \dot{v}_1 = & -\frac{\varepsilon}{C_0^2} (v_{01} e^{-\alpha_1 x} \cos \omega_1 \tau + v_{02} e^{-\alpha_2 x} \cos \omega_2 \tau) \cdot (v_{01} e^{-\alpha_1 x} \omega_1 \sin \omega_1 \tau + \\ & + v_{02} e^{-\alpha_2 x} \omega_2 \sin \omega_2 \tau) . \end{aligned}$$

Видно, что этот член, который порождает нелинейную добавку к линейному решению, содержит волны различных частот: двойные, суммарную и разностную. Высокочастотные волны быстро поглощаются. Пока будем интересоваться только членами, которые дадут впоследствии разностную частоту. Вот они:

$$-\frac{\varepsilon}{C_0^2} v_{01} v_{02} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} \omega_2 \sin \omega_2 \tau \cos \omega_1 \tau - \frac{\varepsilon}{C_0^2} v_{01} v_{02} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} \omega_1 \sin \omega_1 \tau \cos \omega_2 \tau .$$

Применим формулу $2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$, после чего опустим члены с волнами суммарной частоты.

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon v_{01} v_{02}}{C_0^2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} (\omega_2 \sin \omega_2 \tau \cos \omega_1 \tau + \omega_1 \sin \omega_1 \tau \cos \omega_2 \tau) \Rightarrow \\ \Rightarrow & -\frac{\varepsilon v_{01} v_{02}}{C_0^2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} \left(\frac{-\omega_2}{2} \sin \Omega + \frac{\omega_1}{2} \sin \Omega \right) = -\frac{\varepsilon v_{01} v_{02}}{C_0^2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} \frac{\Omega}{2} \sin \Omega . \end{aligned}$$

Это и есть та часть правой части (29), которая является источником волны разностной частоты (ВРЧ). Этот член убывает по x вдвое быстрее, чем каждая из волн накачки. Получаем уравнение вида $\dot{v}_2 - a \ddot{v}_2 = -b_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} \sin \Omega \tau$ с граничным условием отсутствия ВРЧ на входе, то есть при $x = 0$, $v_2 = 0$.

$$\text{Здесь: } a = (b/2\rho_0 C_0^3), \quad b_1 = \varepsilon \Omega v_{01} v_{02} / 2C_0^2 .$$

Опять ищем решение этого уравнения в виде: $v_2 = A(x) \sin \Omega \tau$;

$$\dot{v}_2 = A' \sin \Omega \tau ; \quad \ddot{v}_2 = -A \Omega^2 \sin \Omega \tau . \quad \text{Подставляем. Получаем:}$$

$A' + \alpha_\Omega A = -b_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x}$. Это – линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Мы уже решали такое в § 4, так что сразу напишем его решение:

$$\begin{aligned} A = e^{-\alpha_\Omega x} \left(-\int b_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} e^{\alpha_\Omega x} dx + C_1 \right) = \\ = -e^{-\alpha_\Omega x} \left(\frac{b_1}{\alpha_\Omega - \alpha_1 - \alpha_2} e^{(\alpha_\Omega - \alpha_1 - \alpha_2)x} - C_1 \right) = -\frac{b_1}{\alpha_\Omega - \alpha_1 - \alpha_2} e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)x} + C_1 e^{-\alpha_\Omega x} . \end{aligned}$$

При $x = 0$, $A = 0$, тогда: $-b_1 / (\alpha_\Omega - \alpha_1 - \alpha_2) = C_1$.

$$A = -\frac{b_1}{\alpha_\Omega - \alpha_1 - \alpha_2} \left(e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} - e^{-\alpha_\Omega x} \right) = \frac{-\varepsilon \Omega v_{01} v_{02}}{2C_0^2 \left(\frac{b\Omega^2}{2\rho_0 C_0^3} - \frac{b(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2\rho_0 C_0^3} \right)} \left(e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x} - e^{-\alpha_\Omega x} \right) .$$

Такое уже было для второй гармоники – это разность двух экспонент с разной скоростью убывания (рис. 9).

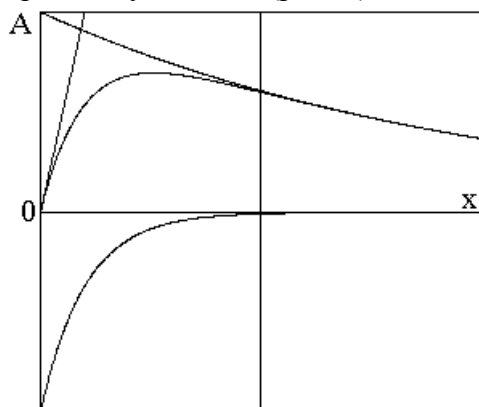


Рис. 9.

На линейном участке $e^{-\xi} \approx 1 - \xi$. Тогда:

$$v_{\Omega} = A \sin \Omega \tau = - \frac{\varepsilon \Omega v_{01} v_{02} (\Omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} x}{2C_0^2 (\Omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) \frac{b}{2\rho_0 C_0^3}} \sin \Omega \tau = - \frac{\varepsilon \Omega v_{01} v_{02}}{2C_0^2} x \sin \Omega \tau .$$

Оценим возможную амплитуду ВРЧ в воде, при давлениях в волнах накачки по одной атмосфере, при $\Omega = 2\pi \cdot 1600$ Гц, $x = 1$ м. Получается $\Delta p_{\Omega} = 50$ Па. Давление хоть и маленькое, но которое всё же можно зафиксировать.

Если $\Gamma \ll 1$, то за первое приближение нужно брать волну постоянной амплитуды. Всё остальное получится точно так же. С той лишь разницей, что уравнением Бюргера можно будет пользоваться только для $x < x_{\text{разрыва}}$. После образования фронта огибающая волны накачки начнёт искажаться и спектр ВРЧ будет обогащаться гармониками. Эффективность преобразования энергии из волны накачки в ВРЧ упадёт.

На принципе взаимодействия акустических волн построены так называемые параметрические антенны, приёмные и излучающие. В параметрическом излучателе (ПИ) антенной является вода (или другая среда) вблизи от излучателя волн накачки.

Длина области взаимодействия волн может существенно превышать размеры излучателя волн накачки. Большие размеры излучающей области обычно приводят к чрезвычайно узкой диаграмме направленности. Излучение идёт в основном вперед. Отсутствуют боковые лепестки. Обычной является диаграмма направленности с шириной на уровне 0.7 в $2 - 3^\circ$. Заметим, что всё это относится к низкочастотной ВРЧ, а понижение по частоте обычно не меньше десяти раз.

Ширина диаграммы направленности и давление в ВРЧ зависят от частоты слабее, чем в резонансных пьезоизлучателях.

Чрезвычайно низок КПД ПИ. Типичные значения порядка $10^{-4} - 10^{-6}$ и зависят от понижения по частоте. Ограничен также и уровень ВРЧ, так как при больших давлениях в волне накачки возникает кавитация. Кроме того, образуется пила, которая сводит на нет эффект от увеличения амплитуды волн накачки.

Для волн накачки применяется обычно двухполосный сигнал DSB. Иногда используется амплитудная модуляция (АМ) и излучение одиночных акустических радиоимпульсов. При АМ ВРЧ состоит из волн с частотой модуляции и с удвоенной частотой. При излучении акустической волны накачки в виде радиоимпульса спектральные составляющие его взаимодействуют друг с другом и излучается волна, форма которой связана с формой производной от огибающей радиоимпульса. Эффект

возникновения ВРЧ при излучении волн накачки в виде радиоимпульса называется самодетектированием. Этот эффект применяется в гидролокации – на его основе в обычном, линейно-акустическом гидролокаторе можно сделать канал приёма ВРЧ, механизм излучения которой есть самодетектирование в среде распространения волн накачки.

Эффект низкочастотного параметрического излучения был обнаружен нижегородцами В.А.Зверевым и А.И.Калачёвым в 1957 году. Описание поля ВРЧ в дальней зоне было сделано в 1960 году Вестервельтом (P.J. Westervelt). Он рассматривал излучение ВРЧ из прожекторной зоны, где волны накачки в цилиндрическом пучке считались плоскими. Дифракция не учитывалась. Использовалось уравнение типа

$$v'' - \frac{1}{C_0^2} \ddot{v} + \frac{b}{\rho_0 C_0^2} (\ddot{v})' = Q ,$$

где Q – группа нелинейных членов, которые мы при выводе (5) в § 1 выбрасывали. Волну сразу считали плоской. Благодаря этому в Q оставался только один член. Использовался знакомый нам метод возмущений – в качестве первого приближения брали решение этого же линеаризованного уравнения ($Q = 0$). В нём сохраняли только компоненту на разностной частоте. Получалось уравнение Гельмгольца, которое решали методом функций Грина. Если было задано распределение амплитуд волн накачки на излучателе, то удавалось вычислить решение.

Е.А.Заболотская, Р.В.Хохлов (1969), В.П.Кузнецов (1970), пользуясь методом медленно меняющейся амплитуды (которым мы тоже пользовались при выводе уравнения Бюргерса), получили так называемое уравнение ХЗК для описания взаимодействия волн с учётом дифракции.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[v' - \frac{\varepsilon}{C_0^2} v \dot{v} - \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \ddot{v} \right] = \frac{C_0}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] v .$$

Это уравнение точно не решено, но имеется много приближённых аналитических и численных решений (Б.К.Новиков, О.В.Руденко, В.И.Тимошенко).

В лаборатории нелинейной акустики в 1982 году был обнаружен интересный эффект, названный самоусилением параметрического излучения [19]. При работе параметрического излучателя в воде, пересыщенной растворённым газом, наблюдалось усиление волны разностной частоты. Оказалось, что этот эффект был обусловлен образованием и ростом пузырьков газа в прожекторной зоне излучателя волн накачки. Пузырьки, как это будет показано ниже, увеличивали нелинейный параметр среды взаимодействия и, следовательно, амплитуду ВРЧ.