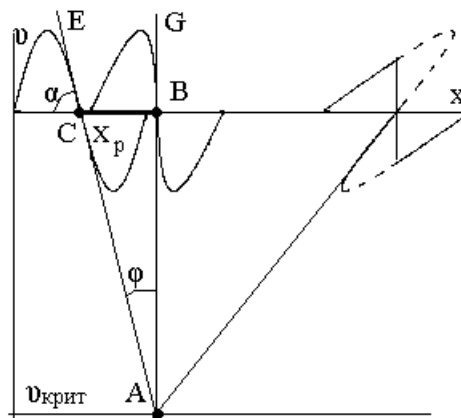


ДРУЖИНИН Г.А.

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ



СПбГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

1998 – 2009

Глава 1

Простые волны Римана

§ 1. ВВЕДЕНИЕ.

Акустические волны – суть упруго-инерционные волны. Это значит, что скорость их распространения определяется упругостью и плотностью вещества. Приведём для примера способ вывода формулы для скорости звука из книги С.Э.Хайкина «Физические основы механики».

Если есть небольшой скачок давления, распространяющийся со скоростью звука C_0 , то за время dt он проходит расстояние $dx = C_0 dt$. В невозмущённом веществе перед скачком давление p_0 , а плотность ρ_0 . За скачком – p и ρ .

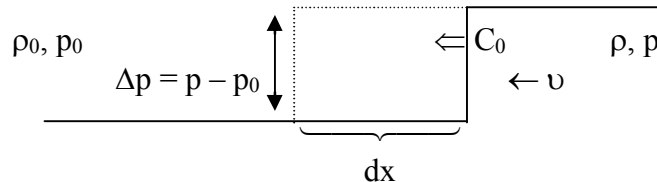


Рис. 1.

Кроме этого вещество за скачком в лабораторной системе координат движется со скоростью v , называемой массовой скоростью. В объёме $V = S dx$ до прохождения скачка давления масса была $m_0 = S (C_0 dt) \rho_0$, а после стала $m = S (C_0 dt) \rho$. Если скачок давления $\Delta p = p - p_0$ положительный, то $\rho > \rho_0$. Это равноценно введению в выделенный объём дополнительного вещества с массой $(m - m_0)$ со скоростью C_0 . (Можно вообразить для наглядности, что мы вдвигаем в этот объём со скоростью C_0 какие-либо твёрдые предметы – спицы, например). Делает это сила $F = (p - p_0) S$. По второму закону Ньютона $F dt = d(mv)$. Или для нашего случая $\Delta p S dt = (\rho - \rho_0) S (C_0 dt) C_0$. Отсюда $C_0^2 = \Delta p / \Delta \rho$ или для очень малых приращений $C_0^2 = dp / d\rho$.

Для идеального газа можно сейчас же эту производную вычислить. Возьмём адиабатическое уравнение состояния – так называемую адиабату Пуассона: $p V^\gamma = \text{const}$. Так как $\rho \sim 1/V$, то $p/\rho^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma$; или окончательно: $p/\rho = (\rho/\rho_0)^\gamma$ и

$$C_0^2 = (p_0/\rho_0^\gamma) \gamma \rho^{\gamma-1} = (\gamma p_0/\rho_0) (\rho/\rho_0)^{\gamma-1}.$$

Если $\Delta p \rightarrow 0$, то $\rho \rightarrow \rho_0$, $(\rho/\rho_0)^{\gamma-1} \rightarrow 1$. Тогда $C_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ – это линейно-акустическая скорость звука, то есть скорость волн с бесконечно малой амплитудой. Кстати, из формулы виден простой способ определения показателя степени адиабаты Пуассона любого газа. Для этого нужно измерить C_0 , p_0 и ρ_0 .

А теперь честно рассмотрим распространение разрывного скачка давления произвольной амплитуды. Потом мы подробнее рассмотрим эти волны, а пока покажем, что, пользуясь лишь законами сохранения, без труда можно получить важные формулы.

Полетим в такой системе отсчёта, где фронт скачка давления покоится (рис. 2.).

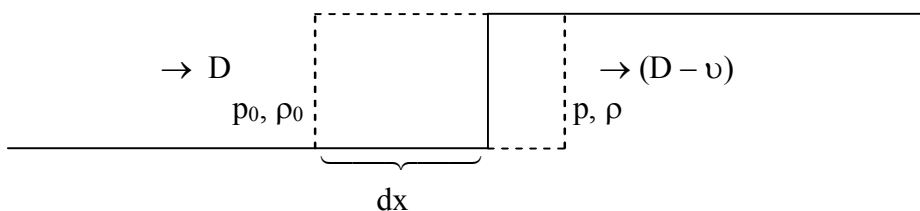


Рис. 2.

Вещество втекает во фронт со скоростью D , а вытекает со скоростью $(D - v)$. Здесь v – массовая скорость в лабораторной системе отсчёта. Объёмчик перед фронтом $S dx = S D dt$ после прохождения через фронт уменьшился (сжался) до величины $S (D - v) dt$. Из закона сохранения массы $\rho_0 D dt = \rho (D - v) dt$ или

$$\rho_0 D = \rho (D - v) \text{ – закон сохранения массы на фронте.} \quad (1)$$

Отсюда $\rho v = (\rho - \rho_0) D$, то есть $v = D \Delta\rho/\rho$ или

$$\Delta\rho/\rho = v/D.$$

Если скачок небольшой, то изменения плотности порядка числа Маха $M = v/C_0$.

Теперь вернёмся в лабораторную систему отсчёта, где вещество перед фронтом покоится. Под действием силы $F = (\rho - \rho_0) S$ некая порция вещества перед фронтом, имеющая массу $m = \rho_0 S dx$ после прохождения фронта будет иметь ту же массу, другой объём и приобретёт скорость v . Тогда по второму закону Ньютона $F dt = d(mv)$, $(\rho - \rho_0) S dx = (\rho_0 S dx) v$; $dx = D dt$. Отсюда

$$\Delta\rho = \rho_0 D v. \quad (2)$$

Это – второй закон Ньютона на разрыве. Так как второй закон можно получить из третьего и закона сохранения импульса, то эту формулу иногда называют законом сохранения импульса на разрыве.

Исключим v из (1) и (2):

$$D^2 = \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho} \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3)$$

При $\Delta\rho \rightarrow 0$, $D^2 \rightarrow C_0^2$, где $C_0^2 = (\partial\rho/\partial\rho)$.

P.S. Если из (1) и (2) исключить D , то можно получить ещё одну полезную формулу:

$$D = (v \rho)/\Delta\rho = \Delta\rho/(\rho_0 v). \text{ Отсюда} \\ v^2 = \Delta\rho((\rho - \rho_0)/(\rho \rho_0)) = \Delta\rho (1/\rho_0 - 1/\rho) = \Delta\rho (V_0 - V). \quad (4)$$

Здесь удельный объём $V = 1/\rho$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

Первое – это уравнение Навье – Стокса, приводимое здесь без вывода. Вывод можно посмотреть у Ландау и Лифшица.

$$\rho (\partial\mathbf{U}/\partial t) + \rho (\mathbf{U}\nabla) \mathbf{U} = - \text{grad } p + \eta \Delta\mathbf{U} + (\eta/3 + \zeta)\text{grad div } \mathbf{U} + \mathbf{f}. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор массовой скорости, $\Delta\mathbf{U} = \text{grad div } \mathbf{U} - \text{rot rot } \mathbf{U}$, η и ζ – сдвиговая и объёмная вязкости, \mathbf{f} – внешняя объёмная сила.

Порядок $\partial v/\partial t \sim \omega v_0$ (конечно, для синусоидальной волны $v = v_0 \sin[\omega(t - x/C_0)]$).

Порядок $v(\partial v/\partial x) \sim v_0 (v_0 (\omega/C_0)) = \omega v_0 M$, то есть отношение второго члена к первому порядку числа Маха.

Это уравнение – фактически второй закон Ньютона для жидкостей и газов. Первый член этого уравнения соответствует произведению массы на ускорение. Если разделить все члены на ρ , то первый член – линейный.

Второй член уравнения – нелинейный. Это – конвективное ускорение. Этот член показывает, как меняется ускорение при смещении гидродинамической частицы в соседнюю точку пространства.

В правой части уравнения стоят силы. Первая сила обусловлена изменением давления по координате. Второй и третий члены являются вязкими силами. В последний член входят все остальные силы, которые могут действовать на жидкость или газ. Это

могут быть гравитационные или электромагнитные силы.

Второе уравнение – это уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = -(\partial \rho / \partial t). \quad (6)$$

Уравнение показывает, что плотность увеличивается вследствие притока вещества внутрь гидродинамической частицы.

Оба уравнения нелинейны!

§ 3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ.

Уравнением состояния называется уравнение вида $p = p(\rho, T)$, связывающее изменение плотности с изменением давления и температуры. С адиабатой Пуассона мы уже знакомы:

$$p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad \text{где } \gamma = C_p/C_v. \quad (7)$$

Если $\gamma = 1$, то получается закон Бойля – Мариотта, то есть изотермическое уравнение состояния:

$$p = p_0 (\rho/\rho_0). \quad (8)$$

Для многих конденсированных (жидких или твёрдых) сред эмпирически установлено уравнение в форме Тэта (P.G.Tait), внешне похожее на уравнение адиабаты Пуассона:

$$\Delta p/p^* + 1 = (\rho/\rho_0)^\gamma. \quad (9)$$

Здесь p^* – не давление, а некий эмпирический параметр. Хотя он и имеет размерность давления, но его принципиально нельзя измерить манометром. Можно именовать его квазидавлением. Если знать способ определения показателя степени γ , то из уже известной формулы $C_0^2 = \gamma p^*/\rho_0$ можно вычислить величину p^* . В книге Зельдовича и Райзера уравнение Тэта записано по-американски, в виде $p = A[(V/V_0)^n - 1]$. Для воды $A = p^* \approx 3000$ атм, $n = \gamma \approx 7$.

§ 4. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ РИМАНА.

Будем рассматривать для простоты только плоские продольные волны. Можно представить, что их генерирует гигантский (даже безграничный) лист фанеры, который кто-либо двигает поступательно.

На звуковых частотах поглощение на длине волны и в воде и в воздухе чрезвычайно малы. На этом основании упростим уравнения (5) и (6) и запишем их в бездиссипативном приближении для плоской одномерной волны:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Кстати, (10) – это уравнение Л.Эйлера (Euler), петербургского академика. Уравнения – нелинейные. Одно из решений было найдено Б.Риманом (Riemann), гёттингенским профессором, для случая, когда можно считать связи между p , ρ и v простыми, то есть

$$p = p(v) \quad \text{и} \quad \rho = \rho(v). \quad (12)$$

А какие ещё могут быть зависимости? А может быть ещё зависимость от скорости деформации, – если среда, например, релаксирует или если присутствует диссипация. В этом случае $\rho = \rho(v, \dot{v})$.

Волны в средах с простыми связями типа (12) называются «простые волны». Подставим (12) в (10) и (11):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} + (v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad . \quad (14)$$

Из уравнения (13) получается:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x} (v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v}) . \quad (15)$$

Мы будем следить за распространением какой-либо определённой точки профиля волны, то есть точки с некоторой скоростью v_1 и плотностью ρ_1 . Этот факт можно записать в виде $v(x,t) = \text{const} = v_1$. Тогда $(\partial x / \partial t)|_{v_1} = U|_{v_1}$ – скорость распространения некоторой точки профиля акустической волны. Больше не будем писать v_1 , так как это произвольная точка, а будем писать просто v .

По правилу дифференцирования неявных функций из Бронштейна и Семендяева:

$$\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{v=\text{const}} = - \frac{(\frac{\partial v}{\partial t})}{(\frac{\partial v}{\partial x})} .$$

Подставим сюда $\partial v / \partial t$ из (15). Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_v = U|_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} \quad . \quad (16)$$

Аналогично, используя уравнение неразрывности (14), получим:

$$\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{\rho=\text{const}} = U|_{\rho} = - \frac{(\frac{\partial p}{\partial t})}{(\frac{\partial p}{\partial x})} = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \quad . \quad (17)$$

Так как волны простые, то есть существует однозначная связь $\rho = \rho(v)$ и только от v , то скорости (16) и (17) равны. $U|_{v(\rho)} = U|_{\rho(v)} = U$.

$$v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} ;$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial v} ; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} C^2 \quad . \quad \text{Здесь} \quad C = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} .$$

Это – линейно-акустическая скорость звука в веществе с плотностью $\rho = \rho(v)$, то есть именно скорость звука в веществе с плотностью ρ , но не скорость распространения точки профиля!

$$\text{Отсюда} \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{C}{\rho}. \quad (18)$$

$$v = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{C d\rho}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{C^2 d\rho}{\rho C} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho C}. \quad (19)$$

Здесь, конечно, использовано $C^2 = \partial p / \partial \rho$.

Теперь посмотрим на (18) и вспомним, что для скачка давления Δp у нас получалось похожее соотношение $v = (\Delta p / \rho_0 D)$. И, наконец, можно поверить, а можно проверить, что если в (19) подставить уравнение состояния $(\rho_0 + \Delta p) / \rho_0 = (\rho / \rho_0)^\gamma$ и отбросить (при условии малости $\Delta p / \rho_0$) малые члены с $(\Delta p)^2$, то получится линейно-акустическая формула $v = \Delta p / (\rho_0 C_0)$.

Самый важный вопрос – какова скорость распространения некоторой фиксированной точки профиля волны?

$$U = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_v = \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} \right) \Big|_v = \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) \Big|_v. \quad \text{Воспользуемся (18) и } C^2 = \partial p / \partial \rho.$$

$$U = \left(v + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\rho}{C} \right) \Big|_v = v + C(v). \quad (20)$$

Из формулы (17) получается, конечно, то же самое:

$$U \Big|_{\rho} = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = v + \rho \frac{C}{\rho} = v + C(\rho).$$

Для того, чтобы выразить U через v хорошо бы получить зависимость $C = C(v)$. Это можно сделать, подставив в (19) зависимость $C = C(\rho)$. Из (7)

$$C = \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = C_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (21)$$

$$\text{Из (19)} \quad v = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{C d\rho}{\rho} = \frac{C_0}{\frac{\gamma-1}{2}} \cdot \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}-1} d\rho = C_0 \frac{2}{(\gamma-1)} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \Big|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{2}{\gamma-1} (C - C_0).$$

$$\text{Окончательно:} \quad C = C_0 + \frac{\gamma-1}{2} v. \quad (22)$$

$$\text{Отсюда:} \quad U = v + C = v + C_0 + \frac{\gamma-1}{2} v = C_0 + \frac{\gamma+1}{2} v = C_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M \right).$$

$$U = C_0 (1 + \varepsilon M). \quad \text{Здесь } \varepsilon \equiv (\gamma+1)/2. \quad (23)$$

Это – точная формула. В том смысле, что нет ограничений на амплитуду волны. Но, конечно, волны должны быть плоскими, простыми, а среда – бездиссипативной. Формула (23) – очень важная и полезная. Из этой формулы ясно, почему γ (а, иногда, и ε) называют нелинейным акустическим параметром. Если среда линейная и $\gamma = 1$, то скорость U всё равно зависит от v и нелинейная акустика продолжает существовать!

§ 5. СКОРОСТЬ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ.

Оказалось, что скорости распространения разных точек профиля акустической волны различны. Чем больше значение массовой скорости v в некоторой точке профиля волны, тем больше скорость распространения этой точки профиля. При $v = 0$ скорость распространения совпадает с линейно-акустической скоростью звука C_0 .

Задумаемся, к чему может привести такая зависимость $U(v)$. Будем наблюдать за распространением полупериода синусоиды (рис. 3, 1). Через некоторое время это волна

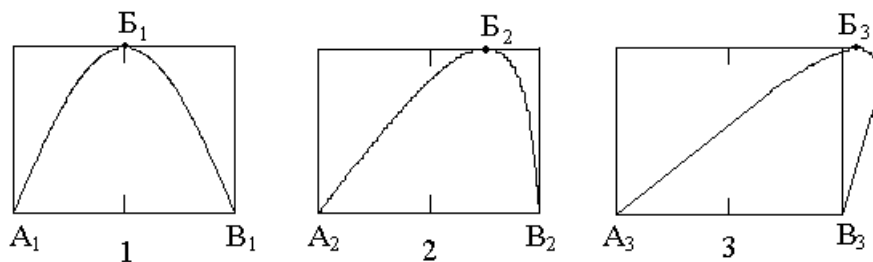


Рис. 3.

окажется в другом месте (рис. 3, 2). Точки профиля A и B будут распространяться со скоростью C_0 и пройдут некоторый путь x_0 . Точка B будет бежать быстрее и пройдёт больший путь x_1 . Все другие точки будут распространяться со скоростями большими, чем C_0 – согласно формуле (23). Профиль волны при этом исказится (рис. 3, 2). При дальнейшем распространении профиль исказится настолько, что возникнет многозначность (рис. 3, 3). Одному значению координаты будет соответствовать два значения массовой скорости. И, конечно, два значения плотности и давления. В природе так не бывает. На самом деле, на месте многозначности профиля возникает резкий скачок давления, плотности, массовой скорости. В зависимости от амплитуды он может быть и достаточно плавным и резким, разрывным. В этом случае этот разрыв называется фронтом ударной волны.

Как можно себе представить разрыв плотности видно из рис. 4. На нём показаны молекулы, например, твёрдого тела. В той области, куда пришла ударная волна (УВ), плотность большая, вещество сжато. Но молекулы правее фронта ещё «не знают», что пришла ударная волна и получается, что ширина фронта УВ порядка межмолекулярного расстояния.

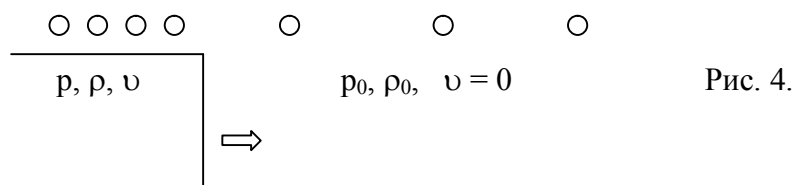


Рис. 4.

Если УВ распространяется в газе, то ширина фронта может быть порядка длины свободного пробега. Конечно, для этого волна должна иметь достаточно большую амплитуду.

Найдём теперь зависимость скорости распространения разрыва, то есть фронта УВ от массовой скорости $D = D(v)$. Из (1)

$$D = \frac{\rho v}{\rho - \rho_0} = \frac{v}{1 - \frac{\rho_0}{\rho}} .$$

Теперь сюда нужно подставить зависимость $\rho = \rho(v)$.

Из (22) можно получить зависимость $\rho = \rho(C)$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} ; \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}} .$$

Подставим сюда $C(v)$ из (20):

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{C_0}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}} ; \quad \text{отсюда} \quad D = \frac{v}{1 - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{C_0}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}}} . \quad (24)$$

Это тоже точная формула, но в рамках принятой нами модели. Теперь упростим (24) для слабых УВ. Критерием «слабости» УВ будет малость второго члена в скобках в (24). Он мал, если $\gamma (v/C_0) = \gamma M \ll 1$.

Разложим бином в скобках по формуле Ньютона:

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 + \dots$$

$$D = \frac{v}{1 - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{C_0} + \frac{(\gamma-1)^2 M^2 2(\gamma+1)}{4 \cdot 2(1-\gamma)(1-\gamma)} + \dots\right)^{\frac{2}{1-\gamma}}} = \frac{v}{1 - \left(1 - M + M^2 \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) + \dots\right)} \approx$$

$$\approx C_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} M\right).$$

Итак, при $\gamma M \ll 1$

$$D = C_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} M\right) = C_0 + \frac{\gamma+1}{4} v = C_0 + \frac{\varepsilon}{2} v . \quad (25)$$

Это тоже очень важная формула. Смысл её таков: при небольших γM скорость фронта ударной волны D линейно растёт с увеличением массовой скорости v .

Без вывода заметим, что для знакопеременной симметричной волны массовой скорости (например, синусоидальной формы) формула (25) будет иметь вид (Г.А.Остроумов) :

$$D = C_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{(M_1 + M_2)}{2}\right). \quad (26)$$

§ 6. МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ФРОНТА.

Теперь важно определить – где находится фронт УВ. Перерисуем третью кривую рис. 3 откладывая по оси ординат координату, а массовую скорость – по оси абсцисс.

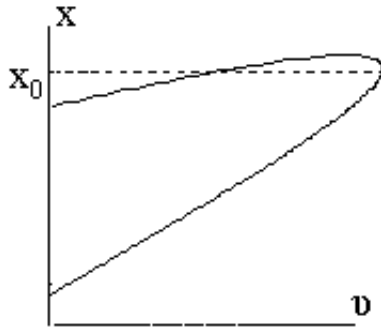


Рис. 5.

На рис. 5 пунктирный отрезок показывает местоположение разрывного фронта. Обозначим координату фронта x_0 . Вычислим разность площадей маленького треугольника между пунктирным отрезком, осью x и кривой и криволинейной фигуры выше пунктирного отрезка – между ним и кривой.

$$\text{Эта разность} \quad S = \int_0^{v_0} (x - x_0) dv .$$

Посмотрим, меняется ли эта величина при распространении волны. Для этого продифференцируем S по времени.

Первый член подынтегрального выражения – это скорость распространения точки профиля гладкой волны. Второй член – скорость фронта УВ. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{v_0} (x - x_0) dv = \int_0^{v_0} \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) dv . \\ \dot{S} &= \int_0^{v_0} [U(v) - D(v)] dv = \int_0^{v_0} \left(C_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \right) dv - \int_0^{v_0} \left(C_0 + \frac{\gamma+1}{4} v_0 \right) dv . \end{aligned}$$

Нужно заметить, что второй интеграл берётся от приближённого выражения. Окончательно

$$\dot{S} = (C_0 v_0 - C_0 v_0) + \frac{\gamma+1}{2} \frac{v_0^2}{2} \Big|_0^{v_0} - \frac{\gamma+1}{4} v_0 v_0 \Big|_0^{v_0} = \frac{v_0^2}{4} (\gamma+1 - \gamma - 1) = 0 .$$

Итак, $\partial S / \partial t = 0$ при любых t и x . Значит площадь не зависит от времени. $S = \text{const}$. Но в момент образования фронта разность площадей S была равна нулю. Значит она и всегда равна нулю, конечно, в рамках применимости формулы (25).

Вывод: фронт располагается таким образом, что площадь между римановской кривой и фронтом справа равна площади слева (рис. 6).

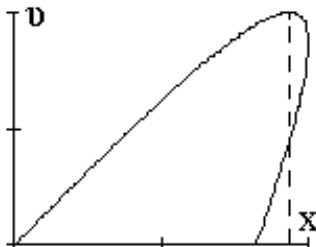


Рис. 6.



Рис. 7.

Теперь рассмотрим наглядные графические иллюстрации распространения однополярной волны с профилем в виде полупериода синусоиды (рис. 7). Точки с нулевой амплитудой бегут со скоростью C_0 , верхняя точка профиля бежит с большей скоростью $U = C_0 + \varepsilon v_{\text{max}}$. Результатом этого становится искажение профиля волны.

Те точки, что лежат выше других, обгоняют нижние. На некотором расстоянии передний фронт импульса становится вертикальным (рис. 8). $U > D$, поэтому форма волны всё сильнее искажается. Заметим, что добавка к линейно-акустической скорости

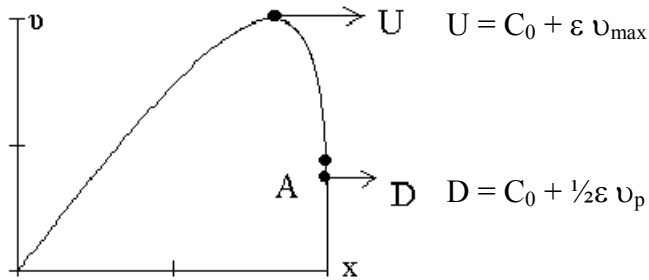


Рис. 8.

звука для ударной волны вдвое меньше, чем для волны с гладким профилем. Поэтому точка на профиле волны, лежащая чуть выше точки A , рис. 8, будет бежать с заметно большей скоростью.

И, наконец, когда волна приобретёт характерный для УВ треугольный профиль, можно будет сказать, что точки чуть левее фронта (рис. 9) в системе отсчёта, бегущей вправо со скоростью C_0 – с этой скоростью бежит, например, точка A – бегут вдвое быстрее фронта. Фронт как бы съедает профиль левее него. Конечно, и все остальные

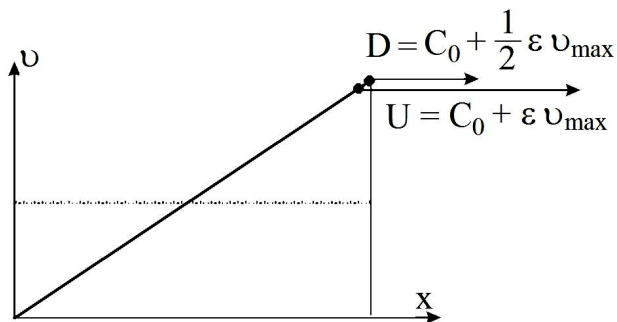


Рис. 9.

точки профиля выше пунктирной линии, соответствующей массовой скорости $\frac{1}{2} v_{\max}$, тоже догоняют фронт. Фронт бежит медленнее потому, что перед ним – невозмущённая среда. А точка левее фронта бежит по уже сжатой и движущейся среде. Поэтому, амплитуда такой волны должна непременно уменьшаться.

§ 7. РАССТОЯНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ РАЗРЫВА.

Нарисуем в координатах $v - x$ период синусоидальной волны. Разные точки профиля волны будут распространяться с различными скоростями согласно формуле (23). Точки

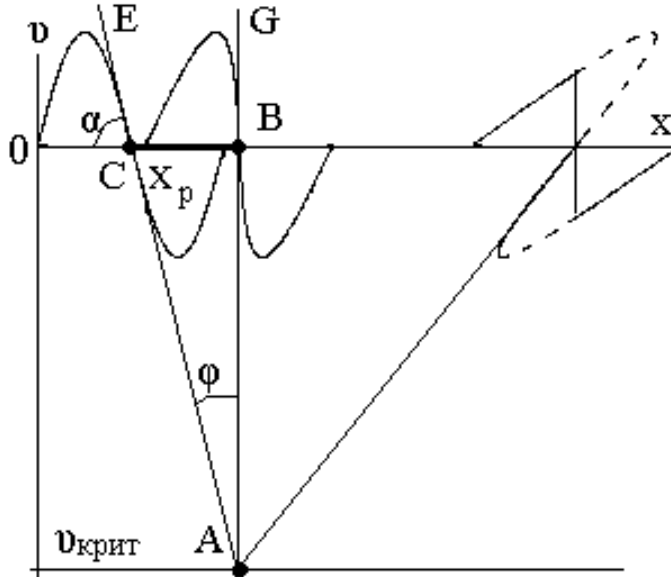


Рис. 10.

профиля с $v < 0$ будут бежать со скоростью $U < C_0$. Если в профиле волны имеется точка с такой отрицательной массовой скоростью $U_{\text{крит}}$, при которой эта точка профиля покоится, то критическая скорость из (23) будет

$$U_{\text{крит}} = -2 C_0 / (\gamma + 1).$$

Теперь рассмотрим касательную к нашей синусоиде в точке С и будем рассматривать не прежнюю синусоидальную волну, а другую волну с прямолинейным передним фронтом в виде этой самой касательной. Точки синусоиды, лежащие близко к точке касания, почти совпадают с ней. Это наглядно демонстрирует рис.10. Мы найдём расстояние, на котором образуется разрыв нашего прямолинейного профиля. Разрыв на синусоидальном профиле в силу близости с касательной образуется на том же расстоянии.

Так как зависимость $U(v)$ линейна, то и расстояния, пройденные каждой точкой профиля за время Δt , будут линейно зависеть от времени. Поэтому, все точки профиля, находящиеся на линии ACE (рис. 10), через некоторое время будут на вертикальной линии ABG. Эта точка В и есть координата образования разрыва, а расстояние СВ называется расстоянием образования разрыва x_p . На больших расстояниях уже возникает неоднозначность и линию разрыва нужно проводить по правилу равенства площадей, как это описано в предыдущем параграфе. Линии AE и AG – касательные к переднему фронту волны. Аналогично можно провести касательные ко всем другим участкам профиля, зафиксировать точки с $U_{\text{крит}}$ и построить формы профиля волны в процессе распространения, то есть эволюцию профиля волны.

Найдём расстояние образования разрыва x_p . Массовая скорость в синусоидальной волне будет $v = v_0 \sin [\omega (t - x/C_0)]$. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\pi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{C_0} \right) \right) = - \frac{v_0 \omega}{C_0} \cos \omega \left(t - \frac{x}{C_0} \right) \Big|_{\pi} = +\omega M_0,$$

где $M_0 = v_0/C_0$ – максимальное число Маха.

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \phi = \frac{\left(\frac{2C_0}{\gamma + 1} \right)}{x_p}. \quad \text{Отсюда: } x_p = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{C_0}{\omega M_0} = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{\lambda}{2\pi M_0}.$$

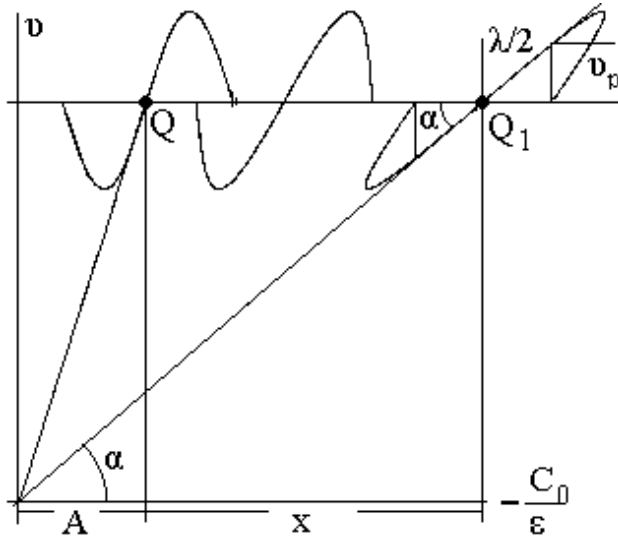
$$x_p = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon M_0} = \frac{C_0}{\varepsilon \omega M_0} = \frac{C_0^2}{\varepsilon \omega v_0}. \quad (27)$$

В приведённом выводе содержится элемент жульничества. Действительно, обратите внимание, что в выражении для тангенсов числители и знаменатели имеют разные размерности. Правда, оба тангенса вычисляются из одного и того же графика. Поэтому, масштабы в итоге сокращаются. Для строгости можно было бы обезразмерить график, построив его в координатах $W - X$, где $W = v/\omega$. Вот и всё!

Пример: для воды при $\Delta p = 1$ атм, $v = \Delta p / (\rho_0 C_0) \approx 0.067$ м/с. $\gamma = 7$, $\varepsilon = 4$; при $\lambda = 1.5$ м, $x_p = 1300$ м! Конечно, наблюдать такой эффект на частоте один килогерц не удастся.

Если опыт проводить на частоте 1 МГц длина волны будет $\lambda = 1.5$ мм и разрыв образуется на разумном расстоянии $x_p = 1.3$ м. Всё это, конечно, верно только для плоских волн.

§ 8. АМПЛИТУДА МАССОВОЙ СКОРОСТИ НА РАЗРЫВЕ В ПИЛООБРАЗНОЙ ВОЛНЕ.



Про распространении первоначально синусоидальной плоской простой волны на расстоянии x_p формируется разрыв и на расстоянии $x > x_p$ волна приобретает характерную пилообразную форму. На рис. 11, который построен так же как и рис 10, показан способ определения

Рис. 11.

амплитуды массовой скорости на разрыве в пилообразной волне. Обозначим расстояние, пройденное точкой Q, буквой x. Из рисунка видно,

что $A = x_p$. Тогда из маленького треугольника с катетами v_p и $\lambda/2$:

$$v_p = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{2} \frac{C_0}{\epsilon} \frac{1}{x + x_p} = \frac{\lambda}{2} \frac{C_0}{\epsilon x_p \left(1 + \frac{x}{x_p}\right)} = v_0 \frac{\pi}{1 + \sigma} \quad \frac{v_p}{v_0} = \frac{\pi}{1 + \sigma} \quad (30)$$

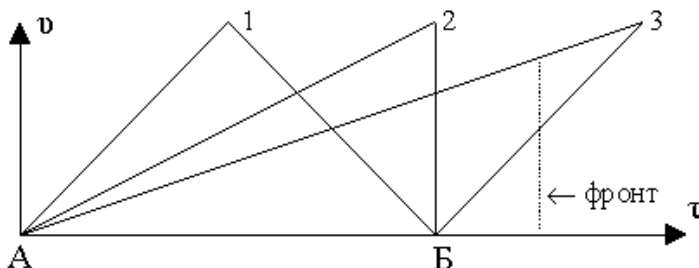
Здесь введено безразмерное расстояние $\sigma = (x/x_p)$. Формула (30) верна при расстояниях до источника $\sigma > 1$, когда форма волны становится пилообразной. На очень больших расстояниях, $\sigma \gg 1$, формула упростится:

$$v_p = \frac{v_0 \pi}{1 + \sigma} \approx \frac{v_0 \pi}{\sigma} = \frac{v_0 \pi}{x} \frac{\lambda C_0}{2 \pi \epsilon v_0} \quad \text{То есть амплитуда массовой скорости на разрыве не}$$

зависит от первоначальной амплитуды массовой скорости в волне! Волна «забыла» свою амплитуду. Из этого можно сделать вывод, что увеличивать амплитуду в опытах с сильными волнами нужно с умом. В тех случаях. Когда образуется разрывный фронт, увеличивать амплитуду нерационально.

Мы до сих пор рассматривали бездиссипативную среду. Оказалось, что в ней эволюция профиля волны приводит к многозначности и к образованию разрывного фронта. Так как близкие к фронту точки профиля стремятся догнать и догоняют его, то энергия волны должна в области фронта бесследно исчезать в рамках нашей бездиссипативной модели. В природе, конечно, эта энергия должна превращаться в тепло.

В этом параграфе мы рассматривали распространение первоначально синусоидальной, то есть знакопеременной волны. Теперь рассмотрим, для примера, эволюцию треугольного импульса сжатия, то есть однополярного импульса. На рис. 12



импульс сжатия, первоначально имевший форму равнобедренного треугольника (рис. 12, 1), показан в

Рис. 12.

положении, когда возник разрывный фронт (рис. 12, 2), и в

положении, когда возникла многозначность профиля (рис. 12, 3). Как мы уже знаем, прямые линии в процессе распространения так и остаются прямыми. Для наглядности мы выбрали систему отсчёта, бегущую с линейно-акустической скоростью звука C_0 . В этой системе точки импульса с нулевой амплитудой (А и Б) покоятся. Площади импульсов 1, 2 и 3 равны. Фронт отрезает от импульса 3 равные кусочки площади справа и слева от фронта. Площадь импульса на рисунке пропорциональна количеству движения – механическому импульсу, так как по вертикали отложена массовая скорость, а по горизонтали – координата, пропорциональная массе.

Вывод – механический импульс сохраняется. Механическая энергия не сохраняется, так как из площади треугольника удаляется кусочек с большей массовой скоростью, а прибавляется кусочек с меньшей. Так как энергия пропорциональна квадрату скорости, то отнимается больше, чем прибавляется, часть энергии переходит на фронте в тепло.

§ 9. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРОСТЫХ ВОЛН.

Вспомним уравнение Эйлера (10):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} + U(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Решение такого нелинейного дифференциального уравнения – бегущая волна: это можно проверить, вычислив производные. Мы сейчас этого делать не будем.

$$v = f \left(t - \frac{x}{U(v)} \right), \quad \text{например} \quad v = v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{C_0 \left(1 + \varepsilon \frac{v}{C_0} \right)} \right).$$

Если $\varepsilon M \ll 1$, то выбросив малые члены порядка M^2 , получаем:

$$v \approx v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{C_0} + \frac{x}{C_0} \varepsilon \frac{v}{C_0} \right), \quad \frac{v}{v_0} = \sin \left(\omega \tau + \frac{\omega \varepsilon v x}{C_0^2} \right), \quad (28)$$

где $\tau = (t - x/C_0)$ – это время в сопровождающей волну системе отсчёта, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$. Конечно, вместо синуса может быть и другая функция!

Найдём уравнение, описывающее простые волны Римана при условии, что волны слабые, $\varepsilon M \ll 1$. Перепишем (28) в виде: $v = v_0 \sin(F(v, \tau, x))$; $F = \omega(\tau + (\varepsilon M x/C_0))$.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = v_0 \cos(F) \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} \right), \quad \text{здесь} \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = v_0 \cos(F) \left(\omega + \frac{\omega \varepsilon x}{C_0^2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + 0 \right), \quad \text{то есть} \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\omega v_0 \cos(F)}{1 - \frac{\omega \varepsilon x}{C_0^2} v_0 \cos(F)}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_0 \cos(F) \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad \text{Здесь важно обратить}$$

внимание на то, что это производная не по той прежней координате x , которая входит в τ , а по «слабой» координате x , от которой зависит второй член аргумента синуса в (28). Тогда:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_0 \cos(F) \left(\frac{\varepsilon v \omega}{C_0^2} + \frac{\varepsilon \omega x}{C_0^2} \frac{\partial v}{\partial x} + 0 \right), \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\omega \varepsilon v v_0 \cos(F)}{C_0^2 \left(1 - \frac{\omega \varepsilon x}{C_0^2} v_0 \cos(F) \right)}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon v}{C_0^2} \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (29)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение описывает эволюцию формы римановской волны, то есть плоской волны в среде без диссипации и дисперсии скорости звука.

Отсюда можно найти $\partial \tau / \partial x = -(\varepsilon v)/C_0^2$; решая, получим $\tau = \tau_0 - (\varepsilon v x)/C_0^2$. Это уравнение характеристик.

§ 10. СПЕКТР ВОЛНЫ ПИЛООБРАЗНОЙ ФОРМЫ.

Вычислим спектр волны пилообразной формы, профиль которой изображён на рис. 13.

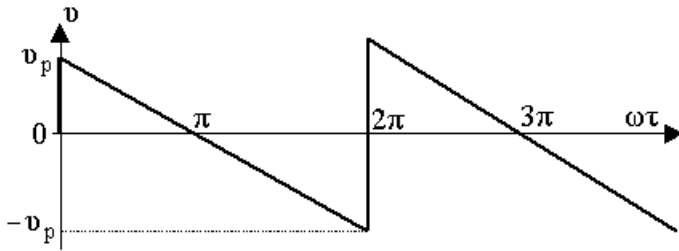


Рис. 13.

$v = A(\omega\tau) + B$; при $\omega\tau = 0$, $v = v_p = B$; при $\omega\tau = \pi$, $v = A\pi + v_p = 0$; $A = -v_p/\pi$. Подставив v_p из (30), получим $A = -v_0/(1 + \sigma)$. Окончательно:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1 + \sigma} (\pi - \omega\tau), \text{ при } 0 < \omega\tau < \pi.$$

Так как функция нечётная, то при разложении в ряд Фурье коэффициенты при косинусах $A_n = A_0 = 0$,

$$B_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \sigma} (\pi - \omega\tau) \sin(n\omega\tau) d(\omega\tau).$$

$$\int_0^\pi \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi = -\frac{1}{n}((-1)^n - 1). \text{ Проинтегрируем по частям:}$$

$$\int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^\pi - \frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{n} (-1)^n.$$

$$B_n = \frac{2}{\pi(1 + \sigma)} \left(\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} (-1)^n \right) = \frac{2\pi}{\pi n(1 + \sigma)} = \frac{2}{n(1 + \sigma)},$$

$$\frac{v}{v_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega\tau) = \frac{2}{1 + \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega\tau)}{n}. \quad (31)$$

Видно, что амплитуды гармоник убывают как $1/n$.

§ 11. СПЕКТР ИСКАЖЁННОЙ СИНУСОИДЫ. ФОРМУЛА БЕССЕЛЯ-ФУБИНИ

Вспомним (28):

$$\frac{v}{v_0} = \sin \left(\omega\tau + \frac{\omega\varepsilon v}{C_0^2} x \right) = \sin \left(\omega\tau + \frac{\omega\varepsilon v_0 x}{C_0^2} \frac{v}{v_0} \right).$$

$$\frac{v}{v_0} = \sin \left(\omega\tau + \sigma \frac{v}{v_0} \right). \quad (32)$$

Это уравнение описывает эволюцию формы первоначально синусоидальной волны вплоть до образования разрыва. Чтобы узнать, как меняется спектр волны при распространении, разложим (32) в ряд Фурье. В силу нечётности функции $A_n = A_0 = 0$.

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \left(\omega\tau + \sigma \frac{v}{v_0} \right) \sin(n\omega\tau) d(\omega\tau).$$

Трудность вычисления состоит в том, что под интегралом v/v_0 тоже зависит от $\omega\tau$.

Для упрощения введём новую переменную $\xi = (\omega\tau + \sigma(v/v_0))$.

Тогда: $\omega\tau = \xi - \sigma(v/v_0) = \xi - \sigma \sin \xi$. Отсюда:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \xi \sin [n(\xi - \sigma \sin \xi)] d(\xi - \sigma \sin \xi). \text{ Так как } \sin nx dx = -(1/n) d(\cos nx), \text{ то:}$$

$$B_n = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin \xi d(\cos(n(\xi - \sigma \sin \xi))). \text{ Используем правило: } \int V dU = VU - \int U dV.$$

$$B_n = \left[-\frac{2}{\pi n} \sin \xi \cos(n(\xi - \sigma \sin \xi)) \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos(n(\xi - \sigma \sin \xi)) \cos \xi d\xi.$$

Здесь необходимо заметить, что при замене переменных мы не сменили пределы интегрирования. Однако, при $\omega\tau = 0$ и $\xi = 0$, так как если массовая скорость v в начальный момент равна нулю, то она и дальше будет равна нулю при $\omega\tau = 0$. Те же рассуждения и для $\omega\tau = \pi$.

Первый член при подстановке 0 и π обращается в нуль. Во втором члене используем формулу $2 \cos A \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$. Тогда:

$$B_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi [\cos((n-1)\xi - n\sigma \sin \xi) + \cos((n+1)\xi - n\sigma \sin \xi)] d\xi.$$

В «Математической энциклопедии», М. 1977, т. 1, с. 463, находим формулы:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\xi - y \sin \xi) d\xi = J_m(y), \quad (33)$$

$$J_{m+1}(y) + J_{m-1}(y) = \frac{2m}{y} J_m(y). \quad (34)$$

Здесь J_m – знакомые нам функции кёнигсбергского астронома Фридриха Вильгельма Бесселя.

Окончательно:

$$B_n = \frac{1}{n} [J_{n-1}(n\sigma) + J_{n+1}(n\sigma)] = \frac{1}{n} \frac{2n}{n\sigma} J_n(n\sigma) = \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma) . \quad (35)$$

$$\frac{v}{v_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin(n\omega\tau) . \quad (36)$$

Этот ряд называется разложением Бесселя – Фубини. В справочниках есть таблицы функций J_0 и J_1 . Воспользовавшись формулой (35) можно найти $J_2(y) = (2 J_1(y)/y) - J_0(y)$ и все остальные функции.

На рис. 14 построены графики зависимостей $B_n(\sigma)$ для первых трёх гармоник. По формуле (35) эти графики можно строить только для значений σ от 0 до 1. Дальше образуется разрыв и нужно вычислять спектр численными методами. Эти расчёты сделаны в курсовой работе студентки 3 курса С. Жигаревой.

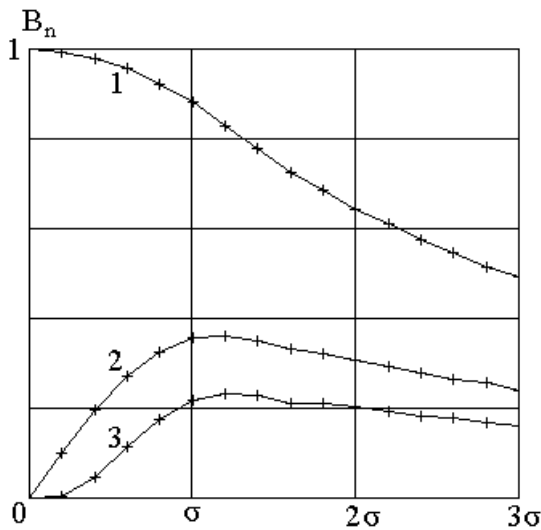


Рис. 14.

При $\sigma = 0$ волна синусоидальная, амплитуды всех гармоник, кроме первой, равны нулю. При распространении волна искажается, амплитуда первой гармоники уменьшается, растут амплитуды высших гармоник. Интересно сравнить амплитуды гармоник на расстоянии образования разрыва $\sigma = 1$, на расстоянии $\sigma = 3$ и на расстоянии $\sigma \gg 1$, где волна уже стала пилообразной (см. таблицу). Амплитуда первой гармоники везде принята за 1.

Номер гармоники	1	2	3
Амплитуда при: $\sigma = 1$	1	0.4	0.23
$\sigma = 3$	1	0.49	0.32
$\sigma \rightarrow \infty$ (пила)	1	0.5	0.33